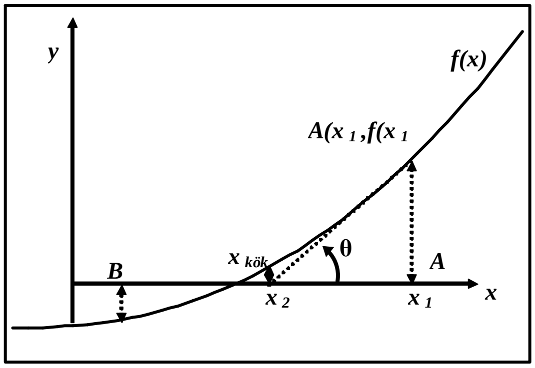
1.4 NEWTON-RAPHSON YÖNTEMİ

$f(x)$ fonksiyonların grafik olarak çözümü (köklerinin bulunması) için kullanılan en basit yöntemlerden birisi de Newton-Raphson yöntemidir. Bu yöntemde, fonksiyonu sıfır yapan kök değeri, $f(x)$ fonksiyonunun x noktasındaki eğimiminden yararlanarak bulunulur (Şekil 1.7). Şekildeki alt indisler işlem sırasını belirtmek için kullanılmıştır. $f(x)$ fonksiyonuna A noktasında teğet olan doğrunun ($f(x)$ in tanjant değeri) x eksenini kestiği x_2 noktası kök bulmak için elde edilen bir yaklaşım (veya başlangıç) değeridir.



Şekil 1.7. Newton-Raphson yönteminin grafik gösterimi.

Şekil 1.7 den x_1 noktasındaki eğrinin eğimi (türevi veya tanjantı)

$$f'(x_1) = \tan(\theta) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \tag{1.4}$$

denklemi ile yazılabilir. Bu denklemdeki $f'(x_1)$ terimi, $f(x)$ fonksiyonunun $x = x_1$ deki türevinin değeridir. x_2 değeri, yaklaşık olarak elde edilecek olan kök değeridir (bu değerde $f(x_2) \simeq 0$). Tekrarlama işlemine, doğru köke istenilen duyarlılıkta yaklaşıncaya kadar devam edilir. Denklem (1.4) ten x_2 aşağıdaki gibi yazılırsa,

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \tag{1.5}$$

veya

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1.6}$$

kök değeri elde edilir. Bu ifade Taylor açılımından yararlanarak da yazılabilir:

$$f(x_2) = f(x_1) + (x_2 - x_1)f'(x_1) + ... + \frac{f^{(k)}(x_1)}{k!}(x_2 - x_1)^k + R \tag{1.7}$$

Bu açılımın sağ kısmındaki ilk iki terimin dışındaki diğer terimlerin değerlerinin çok küçük olmalarından dolayı ihmal edilirlerse,

$$f(x_2) = f(x_1) + (x_2 - x_1)f'(x_1) \tag{1.8a}$$

veya

$$0 = f(x_1) + (x_2 - x_1)f'(x_1) \tag{1.8b}$$

denklemlerini yazabiliriz. Bu denklemi yeniden (Newton-Raphson yöntemine göre) düzenlersek

$$0 = f(x_1) + (x_2 - x_1)f'(x_1) \qquad (1.8c)$$

$$-x_2 f'(x_1) = f(x_1) - x_1 f'(x_1) \qquad (1.8c)$$

$$-x_2 = \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} - x_1\frac{f'(x_1)}{f'(x_1)} \qquad (1.8c)$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \qquad (1.8c)$$

ifadesi yazılabilir. Bu denklem gerekli düzenlemeler yapılırsa daha önceden elde edilen (1.6) denklemi ile aynıdır. Newton-Raphson yöntemiyle bir fonksiyonun kökünü hesaplarken yapılan hata

$$\varepsilon_{n+1} = x_{n+1} - x_n \qquad (1.8.1)$$

olmak üzere,

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{1}{2}\varepsilon_n^2 \frac{f''(x_n)}{f'(x_n)} + O(\varepsilon_n^3) \qquad (1.8.2)$$

şeklindedir. Aşağıdaki Örnek 1.2 ile yöntem daha kolay anlaşılacaktır.

Örnek 1.2. Denklem (1.6) yi kullanarak $f(x) = e^{-x} - \sin(\pi x/2)$ fonksiyonunu Newton-Rapson yöntemine göre çözünüz.
Önce $f(x)$ fonksiyonun türevi alınır:

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = -exp(-x) - (\pi cos(\pi x/2))/2$$

Kök değerleri $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ tekrarlama denklemine göre

$$x_{n+1} = x_n + \frac{e^{-x} - sin(\pi x_n/2)}{-e^{-x}\text{x}(\pi/2)cos(\pi x_n/2)} \qquad (1.9)$$

şeklinde olacaktır. Denklemlerdeki n alt indisi öteleme değerlerini göstermek amacı ile kullanılmaktadır. Newton-Rapson yönteminin algoritması aşağıda verilmekte ve akış diyagramı ise Şekil 1.8 de gösterilmektedir. Bu algoritmadan veya akış diyagramından yararlanarak yöntem diğer programlama dillerine kolayca çevrilebilir.

Algoritma 1.2 Newton-Raphson yönteminin algoritması.

```
 1.Başla
 2.Oku X, HATA
 3.PI=3.14159
 4.FX=EXP(-X)-SIN(PI*X/2.)
 5.F1X=-EXP(-X)-(PI/2.)*(COS(PI*X/2.))
 6.X=X+FX/F1X
 7.W=|EXP(-X)-SIN(PI*X/2.)|
 8.Eğer W > HATA İse Git 3
 9.Yaz "kök değeri ", X
10.Son
```