OTOMATİK KONTROL 1

GEÇİCİ DURUM YANITLARI(TEPKİLERİ)

1. DERECE SİSTEMLER

SİSTEM YANITLARINI NEDEN ANALİZ EDERİZ?

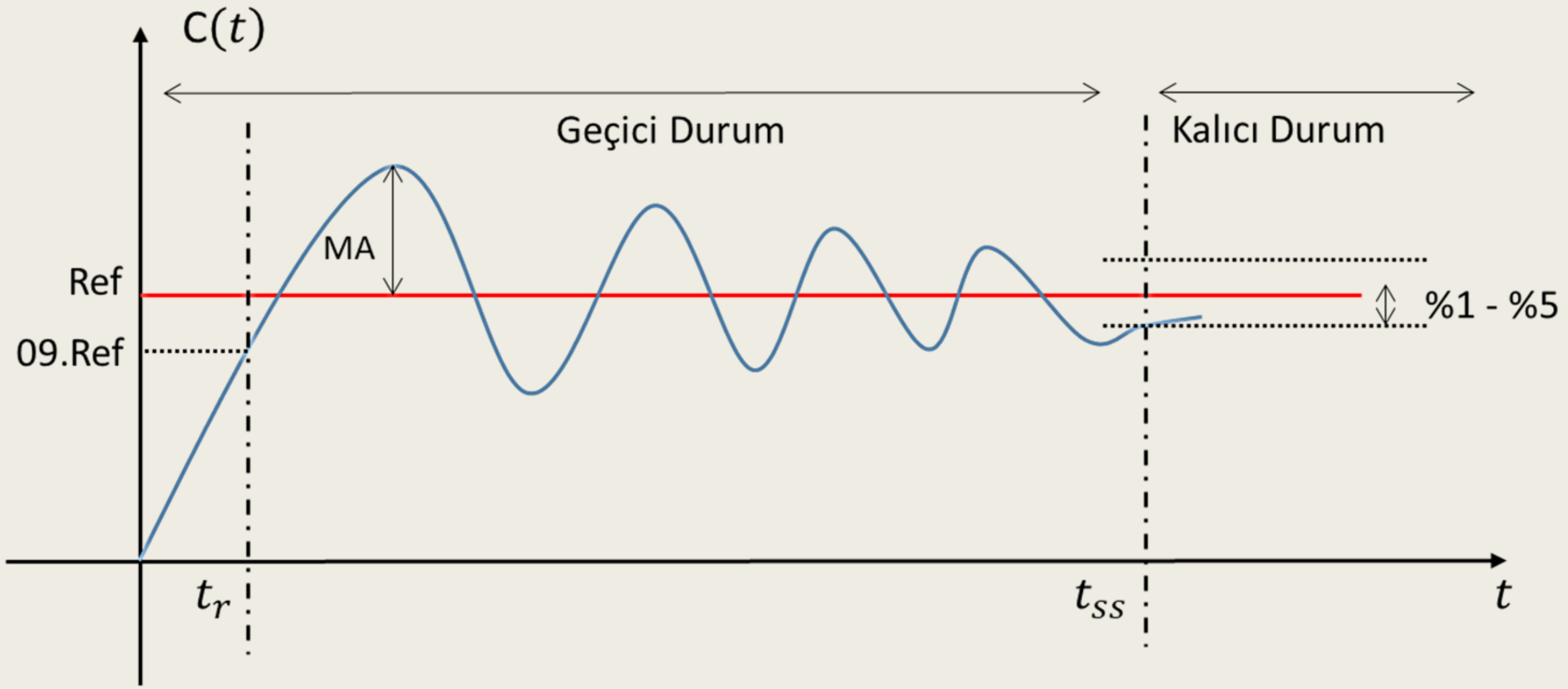
- Otomatik kontrol sistemlerinde sistemlerin yanıtlarını analiz etmek veya sistemi modellemek, aşağıdaki nedenlerden dolayı gereklidir:
- **Sistem performansını değerlendirmek için:** Sistem yanıtının özelliklerini inceleyerek, sistemin performansını değerlendirmek mümkündür. Örneğin, sistemin kararlılığını, hassasiyetini, yükselme süresini, yerleşme süresini ve bastırma oranını inceleyerek, sistemin istenen performansı sağlayıp sağlamadığını belirlemek mümkündür.
- **Sistem tasarımını iyileştirmek için:** Sistem yanıtının özelliklerini inceleyerek, sistemi daha iyi tasarlamak için ipuçları elde etmek mümkündür. Örneğin, sistemin yükselme süresini kısaltmak veya yerleşme süresini azaltmak için sistemin transfer fonksiyonunu veya kutup ve sıfırlarını değiştirmek mümkündür.
- **Sistem bozucu etkilere karşı dayanıklılığını değerlendirmek için:** Sistem yanıtının özelliklerini inceleyerek, sistemin bozucu etkilere karşı dayanıklılığını değerlendirmek mümkündür. Örneğin, sistemin bastırma oranını inceleyerek, sistemin bozucu etkileri ne kadar iyi bastırdığını belirlemek mümkündür.
- **Sistem davranışını tahmin etmek için:** Sistem yanıtının özelliklerini inceleyerek, sistemin gelecekteki davranışını tahmin etmek mümkündür. Örneğin, sistemin kararlılığını inceleyerek, sistemin gelecekte kararlı olup olmayacağını tahmin etmek mümkündür.

SİSTEM YANITLARINI NEDEN ANALİZ EDERİZ?

- Örneğin, bir fabrikada kullanılan bir makinenin hızını kontrol eden bir kontrol sistemi düşünün. Bu sistemin yanıtını analiz ederek, makinenin hızını istenen seviyede tutma yeteneğini belirleyebiliriz. Bu bilgi, sistemi daha iyi tasarlamak veya performansını iyileştirmek için kullanılabilir.
- Benzer şekilde, bir uçağın hızını kontrol eden bir kontrol sistemi düşünün. Bu sistemin yanıtını analiz ederek, uçağın hızını bozucu etkilere karşı dayanıklılığını belirleyebiliriz. Bu bilgi, uçağın güvenliğini iyileştirmek için kullanılabilir.

Geçici Durum ve Kalıcı Durum Yanıtları

- Bir kontrol sisteminin zaman yanıtı iki bölümden oluşur: geçici durum yanıtı ve kalıcı durum yanıtı. Geçici durum yanıtı ile, ilk durumdan son duruma geçen kısmı kastediyoruz. Kalıcı durum yanıtı ile, sistem çıktısının t sonsuza yaklaşırken davranış biçimini kastediyoruz.



HATIRLATMA (KARARLILIK)

- Herhangi bir bozulma veya girdi olmadığında çıktı aynı kalıyorsa bir kontrol sistemi dengededir. Sistem bir başlangıç koşuluna tabi tutulduğunda çıktı sonunda denge durumuna geri dönerse, doğrusal zamanla değişmeyen bir kontrol sistemi kararlıdır. Eğer çıkışın salınımları sonsuza kadar devam ederse, doğrusal zamanla değişmeyen bir kontrol sistemi kısmi olarak kararlıdır. Sistem bir başlangıç koşuluna maruz kaldığında çıktının denge durumundan herhangi bir sınırlama olmaksızın sapması kararsızlıktır.

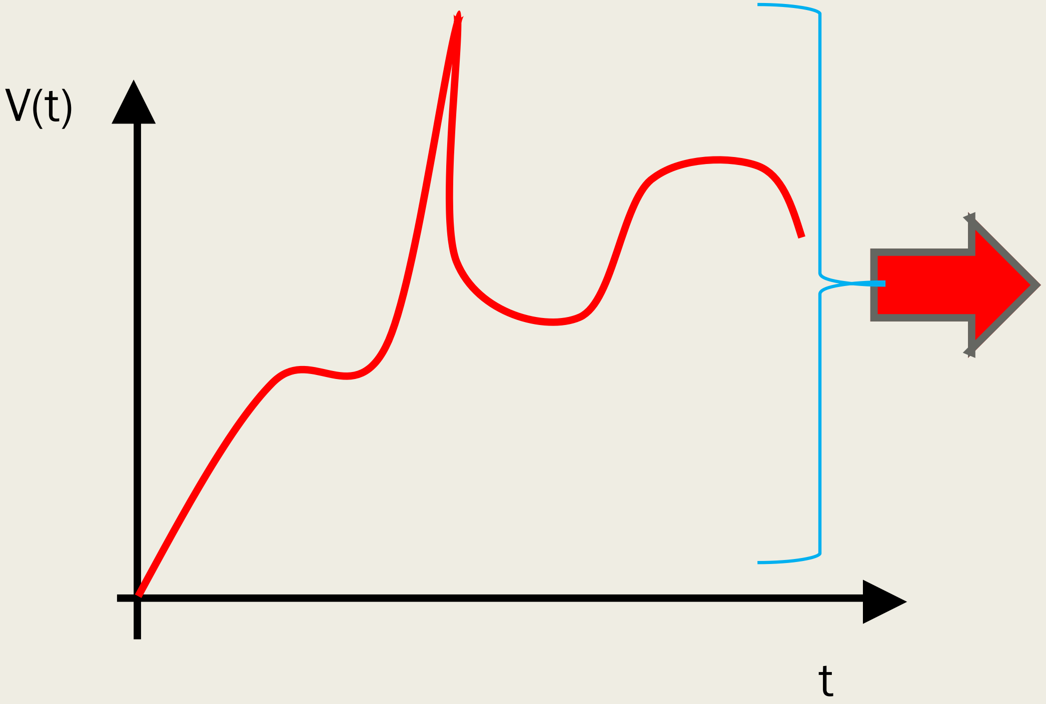
Geçici Durum ve Kalıcı Durum Yanıtları

- Fiziksel bir kontrol sistemi enerji depolamayı içerdiğinden, bir girişe maruz kaldığında sistemin çıkışı girişi hemen takip edemez, ancak sabit bir duruma ulaşılmadan önce bir geçici tepki gösterir. Pratik bir kontrol sisteminin geçici tepkisi, genellikle sabit bir duruma ulaşmadan önce sönümlü salınımlar sergiler. Kararlı durumdaki bir sistemin çıktısı, girdi ile tam olarak uyuşmuyorsa, sistemin kararlı durum hatasına sahip olduğu söylenir. Bu hata, sistemin doğruluğunun bir göstergesidir.
- Geçici ve kalıcı durum cevapları, sistemlerin transfer fonksiyonları bulunduktan sonra incelenir.
- Geçici durum cevabı çözümlemesinden sistemlerin bir giriş uyarısına hangi hızla tepki gösterdikleri belirlenir.

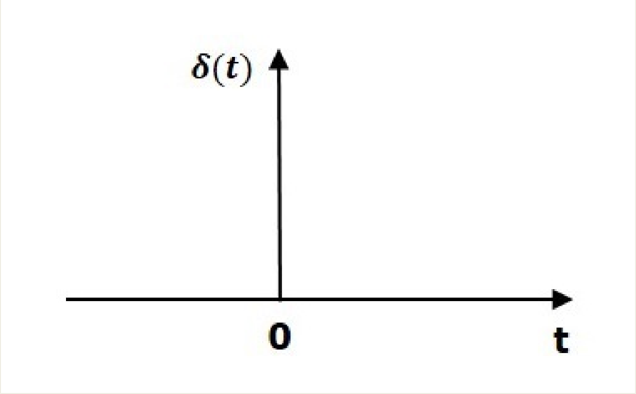
Geçici Durum ve Kalıcı Durum Yanıtları

- Pratikte kontrol sistemlerinin girişi her zaman kolayca formüle edilebilen bir fonksiyon olmaz.
- Çoğunlukla gelişigüzel girişler kendini gösterir.
- Sistemi tanımak için sistemler bazı tipik giriş fonksiyonları ile denenir. Bu girişlere verdikleri tepkiler incelenir.

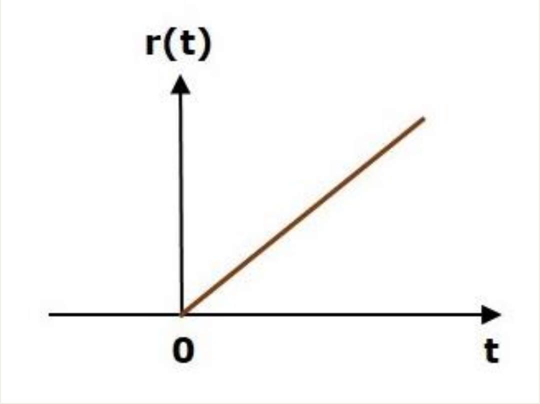
Geçici Durum ve Kalıcı Durum Yanıtları



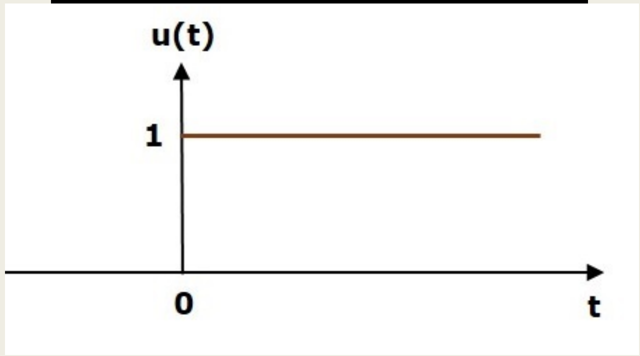
İmpulse (Dürtü) Fonksiyonu



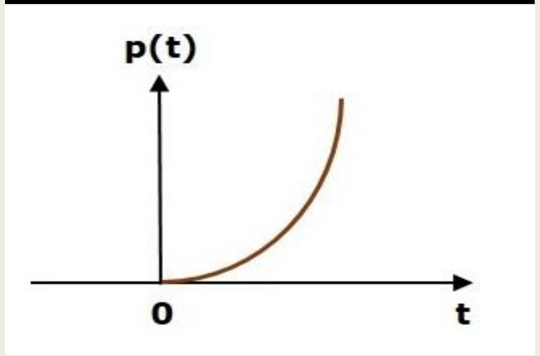
Rampa Fonksiyonu



Basamak Fonksiyonu



İvme (Parabol) Fonksiyonu



Geçici Durum ve Kalıcı Durum Yanıtları

- Sistem özelliklerini analiz etmek için bu tipik giriş sinyallerinden hangisinin kullanılacağı, sistemin normal çalışma altında en sık maruz kalacağı giriş formu ile belirlenebilir.

- Ani şok girişlerine maruz kalan bir sistem için birim darbe (impulse) fonksiyonu en iyisi olabilir. İmpuls fonksiyonu, zaman t = 0'da aniden sıfırdan sonsuz büyüklüğe artan ve ardından sıfıra doğru eksi sonsuz büyüklüğe giden bir fonksiyondur. Bu fonksiyon, bir kontrol sistemine uygulandığında, sistemin yanıtının bir süre içinde nasıl değiştiğini gözlemlememizi sağlar.

ANİ ŞOK GİRİŞİ ÖRNEĞİ

- Yıldırım düşmesi gibi ani bir bozucu etki de, zaman t = 0'da aniden ortaya çıkan ve ardından etkisini kaybeden bir etkidir. Bu nedenle, impuls fonksiyonu, bu tür bir bozucu etkiye karşı bir voltaj kontrol sisteminin (UPS gibi) tepkisini modellemek için uygun bir test sinyalidir.

Geçici Durum ve Kalıcı Durum Yanıtları

- Benzer şekilde, basamak sinyali, büyüklüğü başlangıçta değişebilen ve uygulamadan sonra sabit kalan bir sisteme bir sinyal uygulamaya eşdeğerdir. Eğer $t < 0$ için sıfır değerine sahip olabilmesi için $t = 0$'da başlayan bir sinyal elde etmek istiyorsak, o zaman verilen sinyali sadece birim adım sinyali $u(t)$ ile çarpmamız gerekir.
- Basamak fonksiyonu testi, bir yüke sabit voltaj uygulayan bir kontrol sisteminde, bir yükün başlangıçtaki durumunu sabit bir değere ayarlamak için kontrol sisteminin tepkisini modellemek için kullanılabilir.
- Bir kontrol sistemine girişler kademeli olarak zamanın fonksiyonu olarak değişiyorsa, birim rampa (ramp) fonksiyonu iyi bir test sinyali olabilir.

Geçici Durum ve Kalıcı Durum Yanıtları

- Bir kontrol sistemine girişler kademeli olarak zamanın fonksiyonu olarak değişiyorsa, birim rampa (ramp) fonksiyonu iyi bir test sinyali olabilir.
- Örnek olarak, bir kontrol sistemi tasarladığınızı ve sistemin bir mekanizmanın konumunu kontrol ettiğini düşünelim. Sisteme bir rampa fonksiyonu uygulayarak, mekanizmanın nasıl bir konum değişikliği yaptığını ve bu değişikliğin hızını inceleyebilirsiniz.
- Rampa fonksiyonu genellikle aşağıdaki gibi ifade edilir:

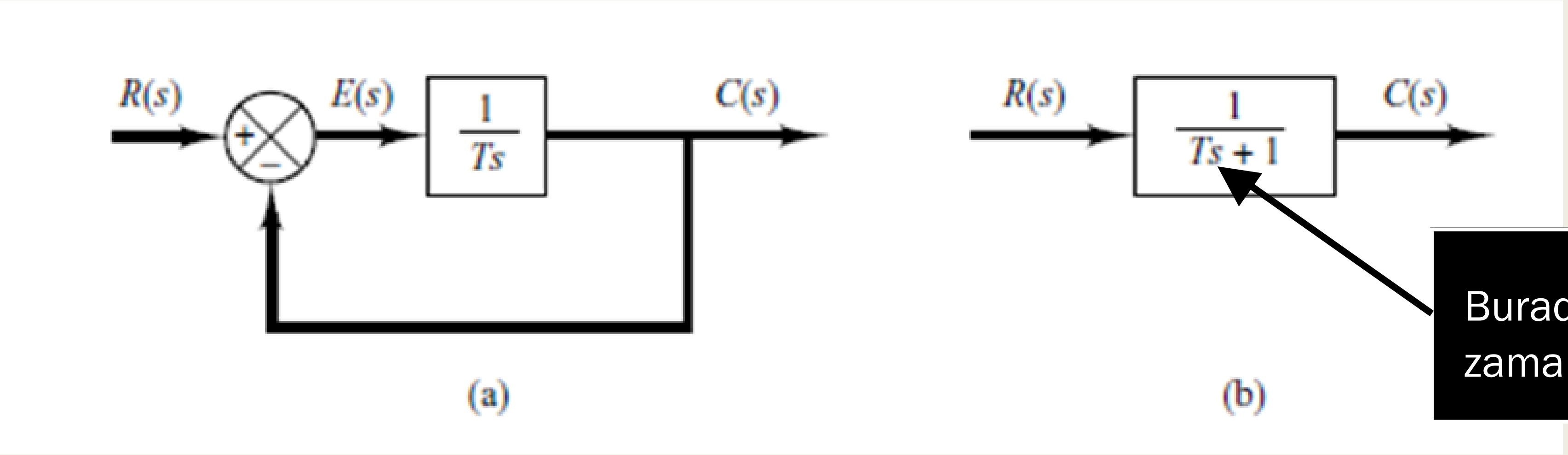
  $r(t)=t$

Birinci Dereceden Sistemlerin Geçici Yanıtları

Birinci dereceden bir kontrol sistemi, giriş-çıkış ilişkisi (transfer fonksiyonu olarak da bilinir) birinci dereceden bir diferansiyel denklem olan bir kontrol sistemi türü olarak tanımlanır. Birinci dereceden bir diferansiyel denklem birinci dereceden bir türev içerir, birinci dereceden daha yüksek bir türev içermez.

Birinci Dereceden Sistemlerin Geçici Yanıtları

- Karakteristik denklemi 1. derece polinomlardan oluşur. Şekil 1(a)'da gösterilen birinci dereceden sistemi göz önünde bulundurun. Fiziksel olarak, bu sistem bir RC devresini, sıcaklık kontrol sistemi veya benzerlerini temsil edebilir. Şekil 1(b)'de basitleştirilmiş bir blok diyagram gösterilmektedir.



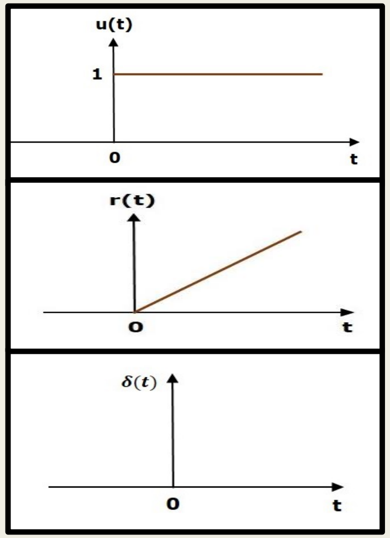
Buradaki τ sembolüne zaman sabiti adı verilir.

Şekil 1 (a) Birinci dereceden bir sitemin blok diagramı (b) Basitleştirilmiş blok diyagram

Birinci Dereceden Sistemlerin Geçici Yanıtları

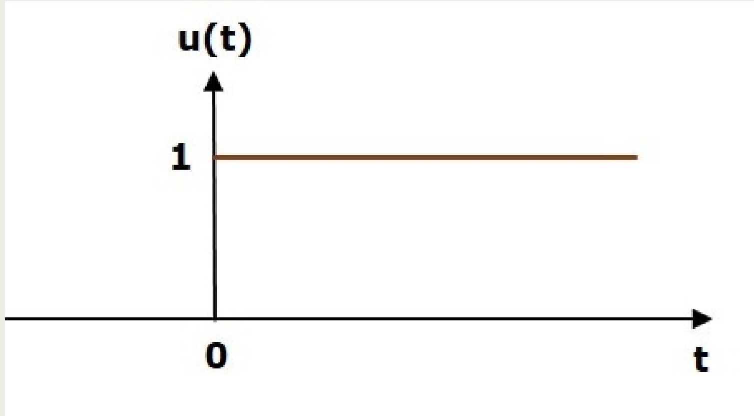
Bu bölümde,

- *birim-basamak,*
- *birim-rampa*
- *birim-impuls fonksiyonları*

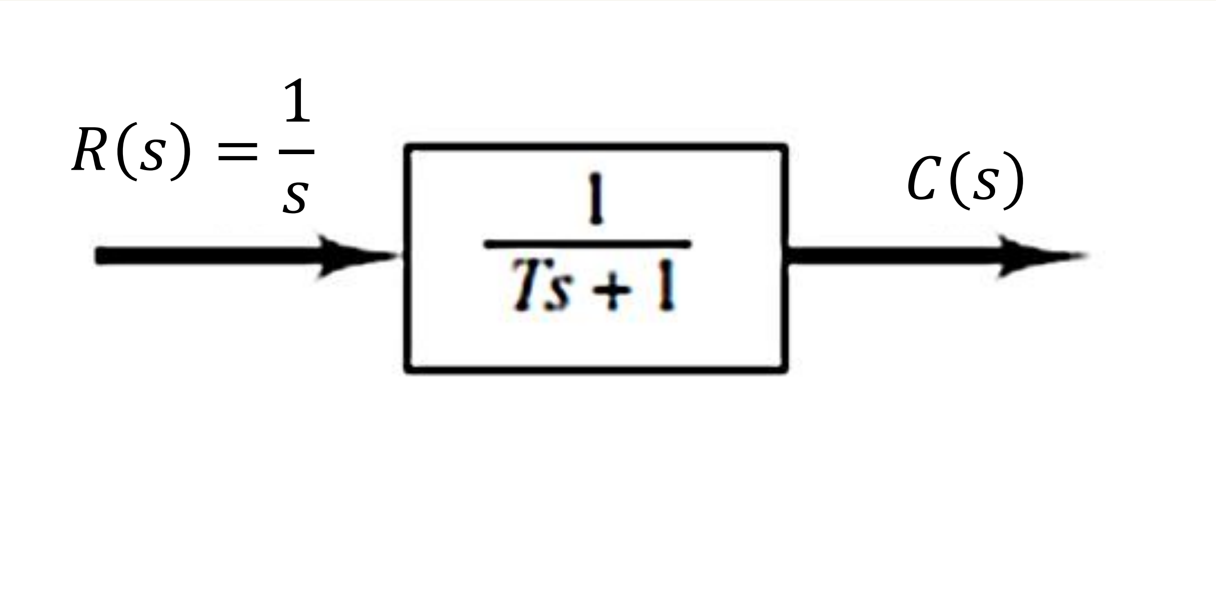


gibi girdilere sistem tepkilerini analiz edilecektir. Bu tepkilerde başlangıç koşullarının sıfır olduğu varsayılmaktadır.

Birinci Derece Sistemlerin Birim-Basamak Yanıtı



$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$



Birinci Derece Sistemlerin Birim-Adım Yanıtı

$$C(s) = \frac{1}{\tau s + 1}\frac{1}{s} \qquad 1$$

C(s)'yi kısmi kesirlere ayıralım.

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{\tau}{\tau s + 1} \qquad 2$$

Birinci Derece Sistemlerin Birim-Adım Yanıtı

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \qquad 3$$

Ters Laplace alalım:

$$c(t) = 1 - e^{-t/\tau} \qquad t \geq 0 \qquad 4$$

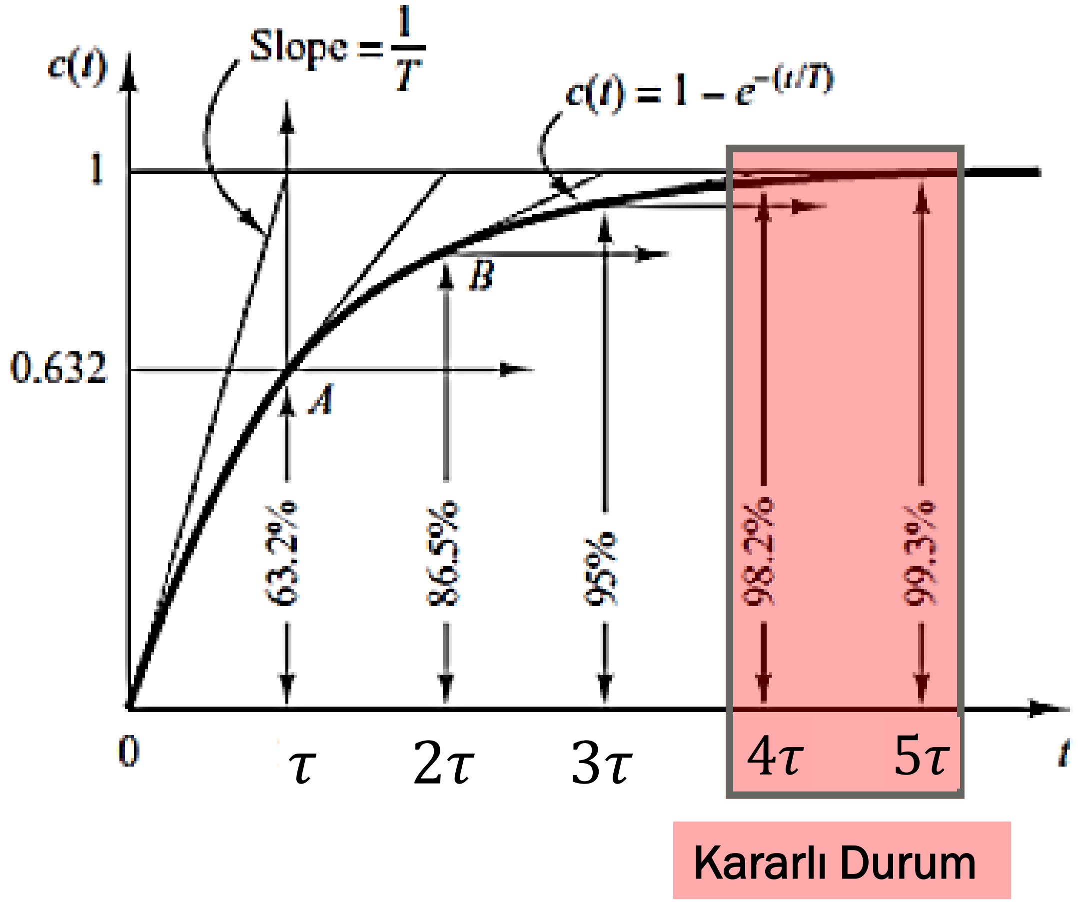
Birinci Derece Sistemlerin Birim-Adım Tepkisi

Denklem 4 , başlangıçta c(t) çıkışının sıfır olduğunu ve sonunda yani t=sonsuzda birim (yani burada 1) haline geldiğini belirtir. Böyle bir üstel yanıt eğrisi c(t)'nin önemli bir özelliği,t= τ'de c(t)'nin değerinin 0.632 olması veya c(t) yanıtının toplam değişiminin %63,2'sine ulaşmasıdır. Bu kolayca görülebilir. c(t)'de t= τ yerine koyarak. Yani,

$$c(t) = 1 - e^{-t/\tau}$$

$$c(t) = 1 - e^{-1} = 0.632$$

Birinci Derece Sistemlerin Birim-Adım Tepkisi



Şekil-2 Eksponansiyel yanıt eğrisi

Zaman sabiti τ ne kadar küçükse, sistem yanıtının o kadar hızlı olduğuna dikkat edin. Üstel tepki eğrisinin bir diğer önemli özelliği, t=0'daki teğet doğrunun eğiminin ${}^{1}/_{\tau}$ olmasıdır.

Birinci Derece Sistemlerin Birim-Adım Tepkisi

t_{ss}**: Yerleşme Süresi** sistem yanıtının yani çıkış işaretinin referans değerin %98'ine ulaşıncaya kadar geçen süre olduğubilindiğine göre:

$$0.98 = 1 - e^{-at} \qquad \boldsymbol{a = \frac{1}{\tau}}$$

$$t = \frac{4}{a} = 4\tau$$

olarak bulunur.

t_r**: Yükselme Süresi,** çıkış işaretinin referans işaretin %10'undan %90'ına erişinceye kadar geçen süre olduğuna göre;

$$0.1 = 1 - e^{-at} \rightarrow t_1 = \frac{0.11}{a}$$

$$0.9 = 1 - e^{-at} \rightarrow t_2 = \frac{2.31}{a}$$

$$t_r = t_2 - t_1 = \frac{2.2}{a} = 2.2\tau$$

olarak bulunacaktır.

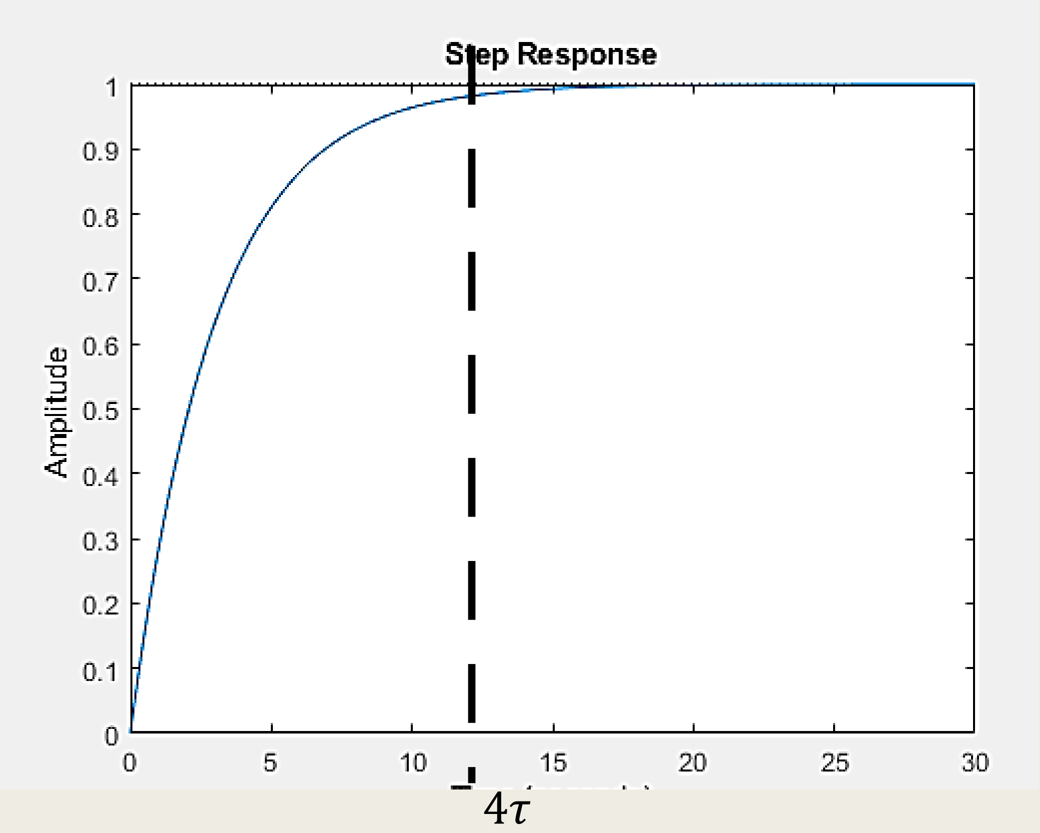
Birinci Derece Sistemlerin Birim-Adım Tepkisi

Birinci derece bir transfer fonksiyonunu ele alalım:

Matlab Kodu:

```
sys=tf(1,[3 1]);
step(sys)
```

$$G(s) = \frac{1}{3s+1}$$



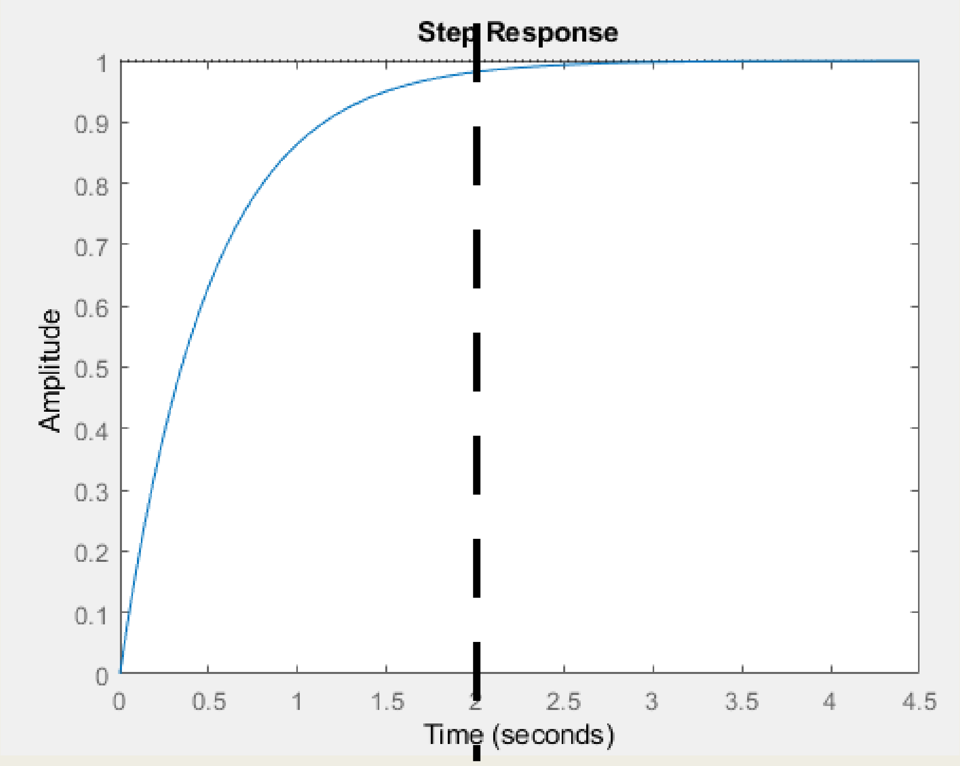
Birinci Derece Sistemlerin Birim-Adım Tepkisi

Birinci derece bir transfer fonksiyonunu ele alalım:

Matlab Kodu:

```
sys=tf(1,[0.5 1]);
step(sys)
```

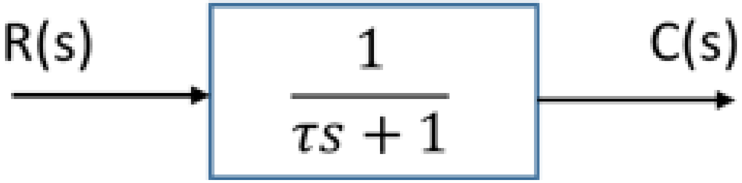
$$G(s) = \frac{1}{0.5s+1}$$

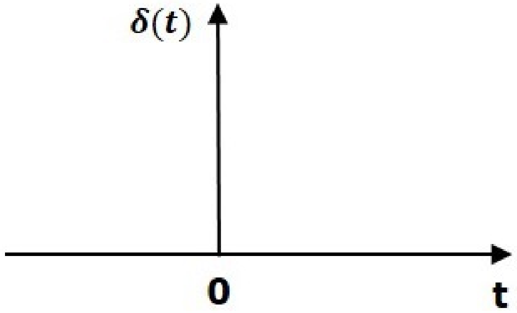


4τ

Birinci Dereceden Sistemlerin Birim İmpuls Yanıtı

Birinci dereceden bir sistemin transfer fonksiyonunu aşağıdaki şekilde zaman sabiti (τ) kullanarak ifade edebiliriz.





$\delta(t) = 0$ for $t \neq 0$

$\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt = 1$

Şekil 6.5 Birinci dereceden kapalı çevrim bir kontrol sistemi blok diyagramı

$R(t)$, birim impuls fonksiyonu olmak üzere $R(s) = 1$'dir.

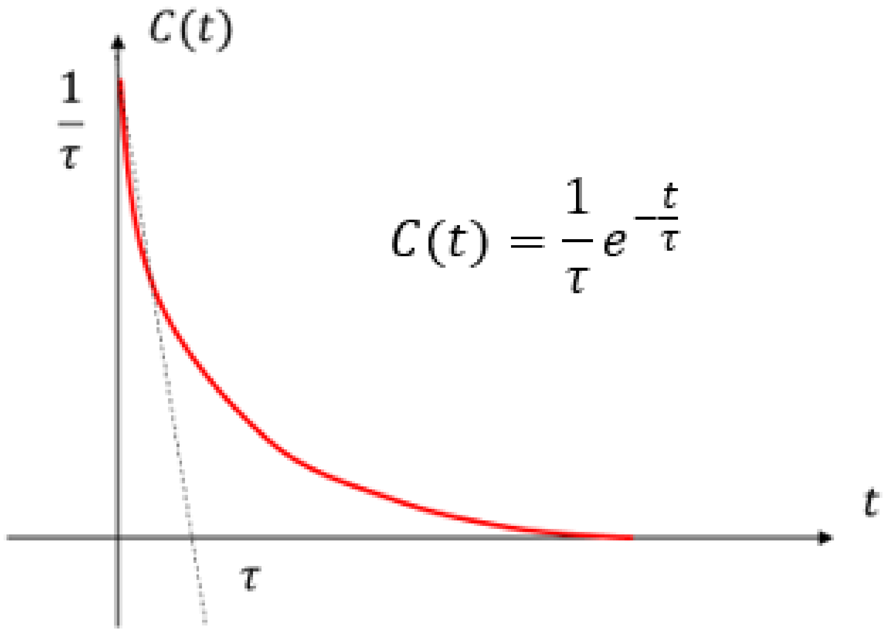
Bu durumda;

$$C(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

Ters Laplace alalım

$$\mathcal{L}^{-1}\{C(s)\} = C(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Birinci Dereceden Sistemlerin Birim Darbe Yanıtı



Şekil 6.6 Birim impuls yanıtı

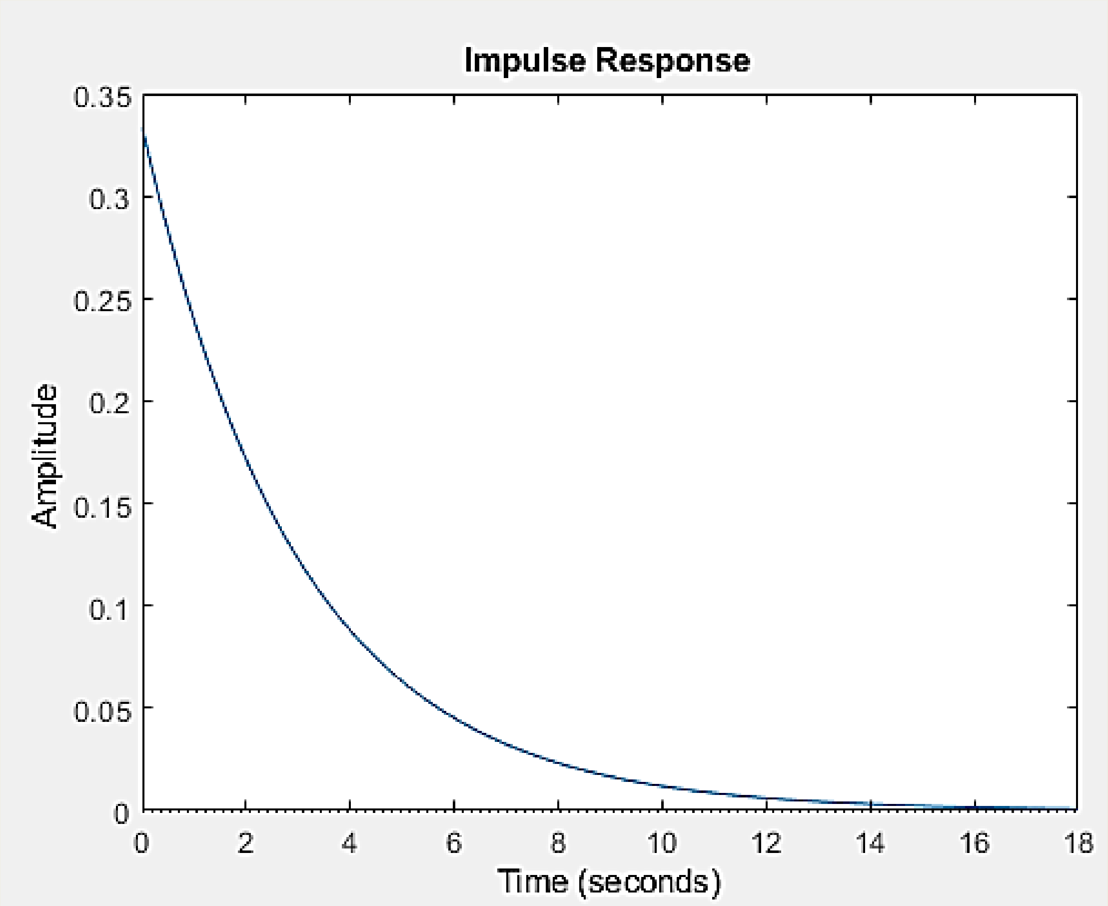
Birinci Derece Sistemlerin Birim-Darbe Tepkisi

Birinci derece bir transfer fonksiyonunu ele alalım:

Matlab Kodu:

```
sys=tf(1,[3 1]);
impulse(sys)
```

$$H(s) = \frac{1}{3s+1}$$

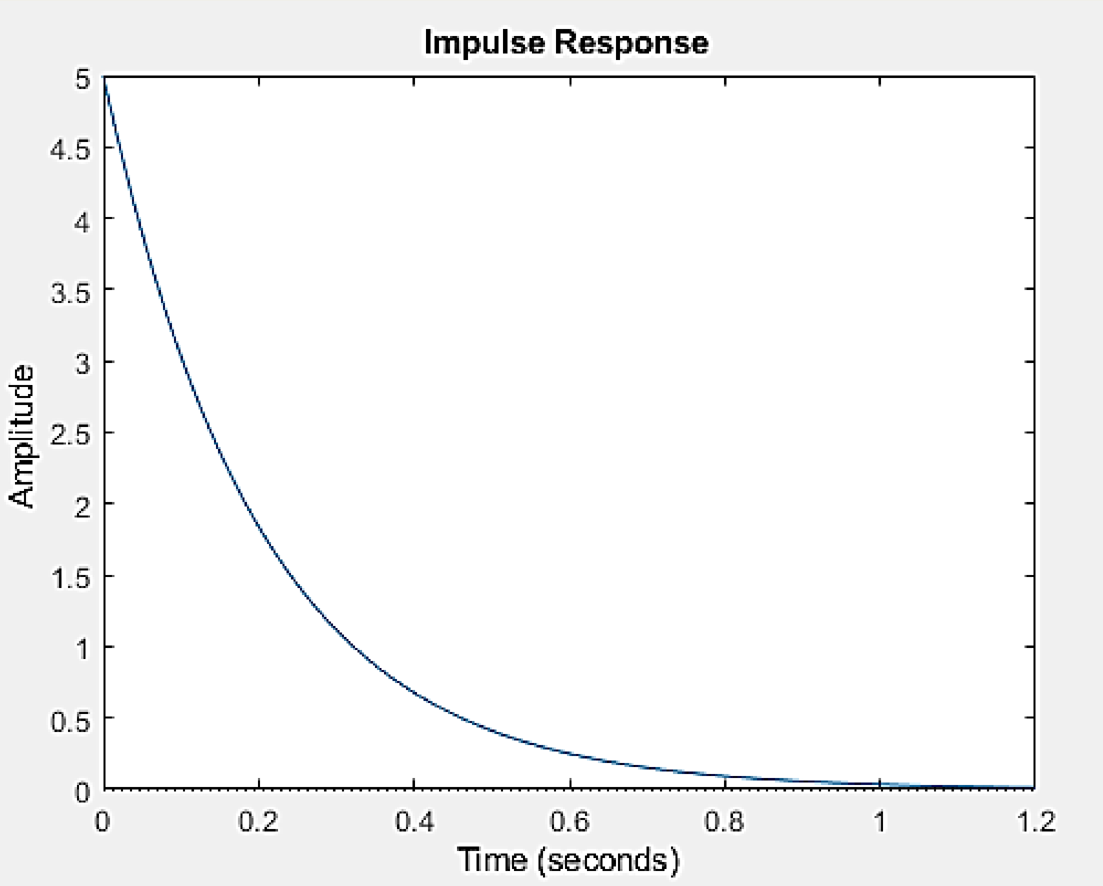


Birinci Derece Sistemlerin Birim-Darbe Tepkisi

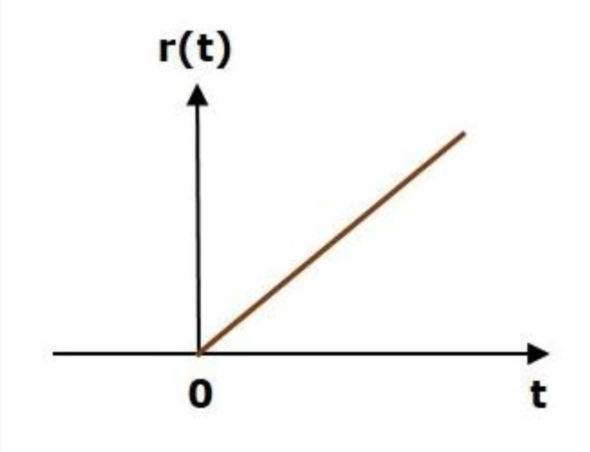
Soru:

Daha iyi bir birim-darbe yanıtı için τ nasıl seçilmelidir?

$$H(s) = \frac{1}{0.2s + 1}$$



Birinci Dereceden Sistemlerin Birim Rampa Yanıtı



Birim rampa fonksiyonunun Laplace dönüşümü $R(s) = 1/s^2$ olduğuna göre birinci dereceden bir sistemin birim rampa cevabı, Denklem 4.1'den yararlanarak s-bölgesinde,

$$C(s) = \frac{1}{\tau s + 1}\frac{1}{s^2}$$

ve basit kesirlerine ayıralarak,

$$C(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{\tau}{s} + \frac{\tau^2}{\tau s + 1}$$

Birinci Dereceden Sistemlerin Birim Rampa Yanıtı

ters Laplace dönüşümü alınırsa birim rampa cevabı aşağıdaki gibi elde edilir.

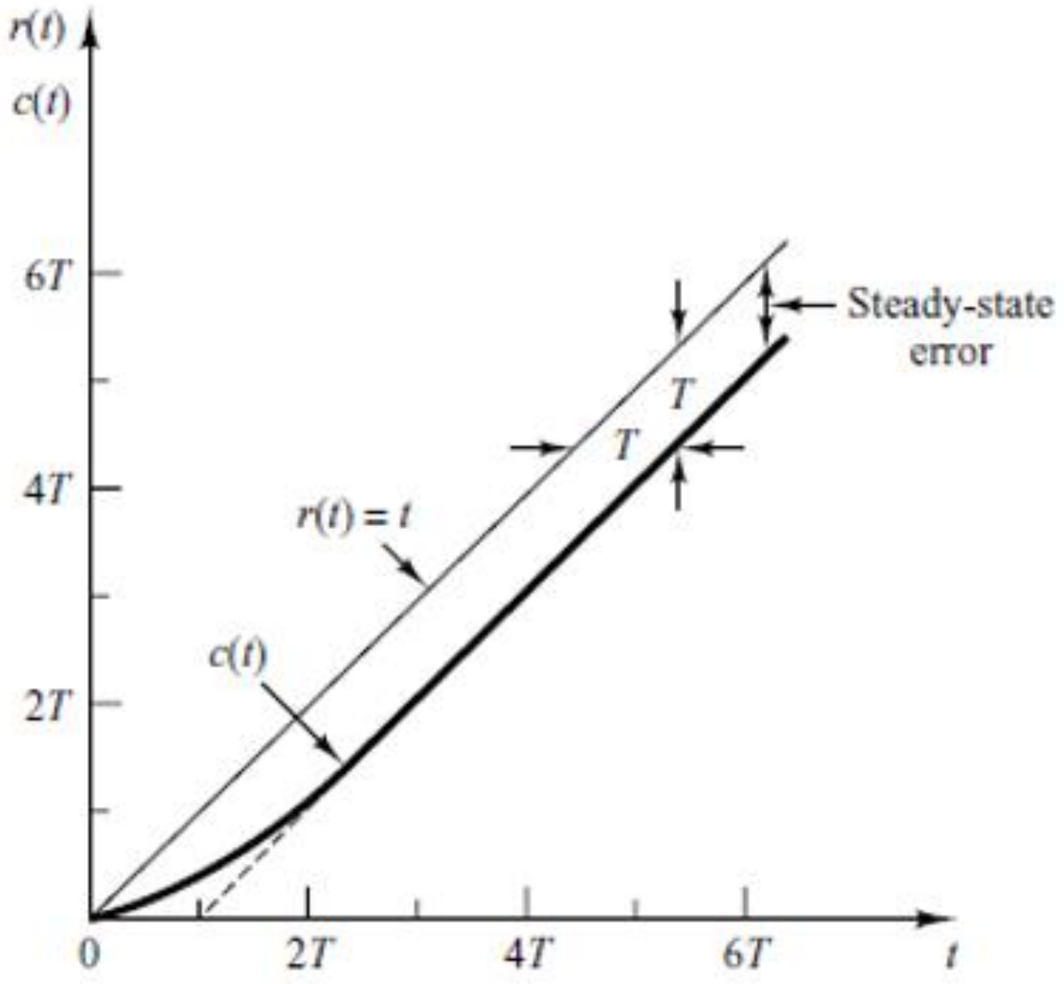
$$c(t) = t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t>=0 \text{ için}$$

Hata sinyali

$$e(t) = r(t) - c(t) = t - \left(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$e(t) = \tau\,(1 - e^{-t/\tau})$$

Birinci Dereceden Sistemlerin Birim Rampa Yanıtı



Şekil 3 Birim rampa yanıtı

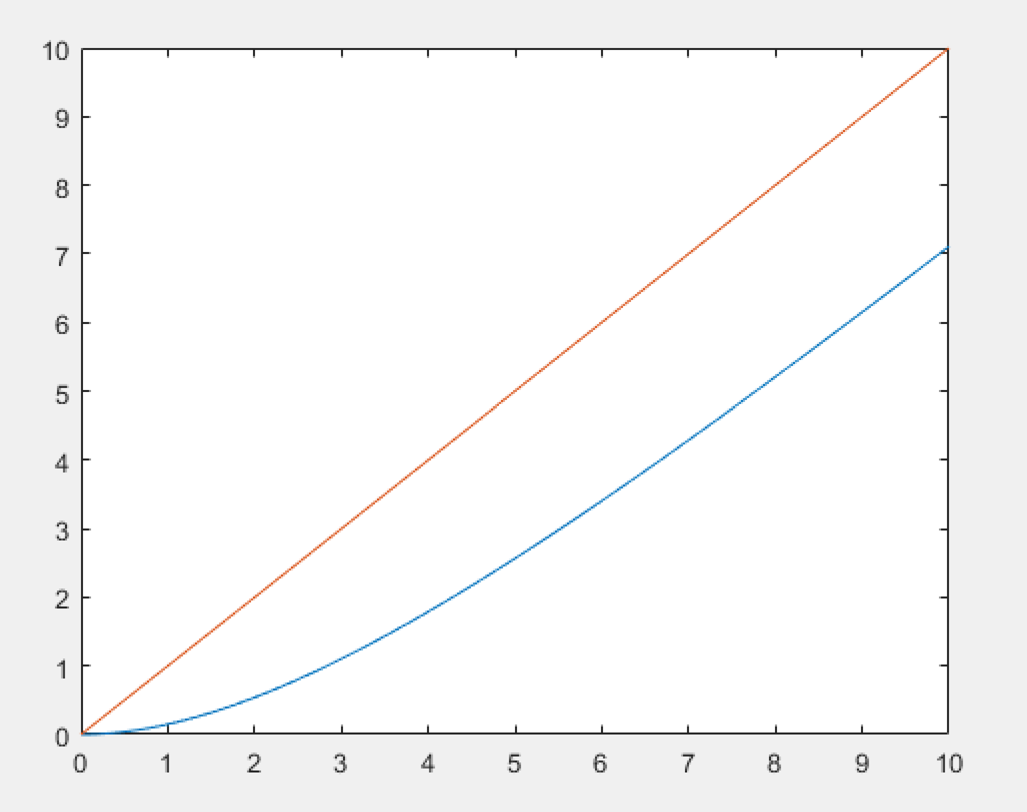
Birinci Derece Sistemlerin Birim-Darbe Tepkisi

Birinci derece bir transfer fonksiyonunu ele alalım:

Matlab Kodu:

```
t=0:0.1:10
ramp=t;
model=tf(1,[3 1]);
[y,t]=lsim(model,ramp,t)
plot(t,y,t,ramp)
```

$$H(s) = \frac{1}{3s+1}$$

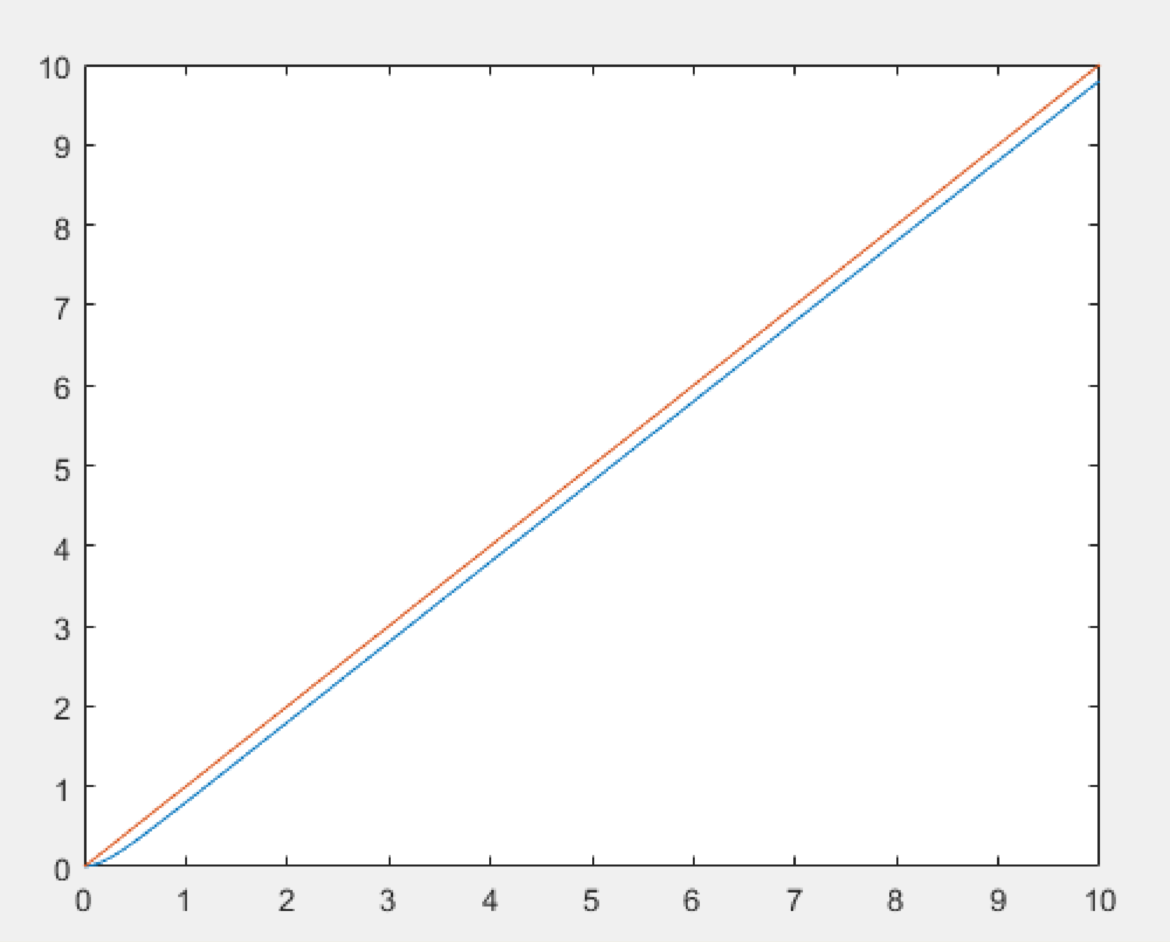


Birinci Derece Sistemlerin Birim-Rampa Tepkisi

Soru:

Daha iyi bir birim-rampa yanıtı için τ nasıl seçilmelidir?

$$H(s) = \frac{1}{0.2s + 1}$$

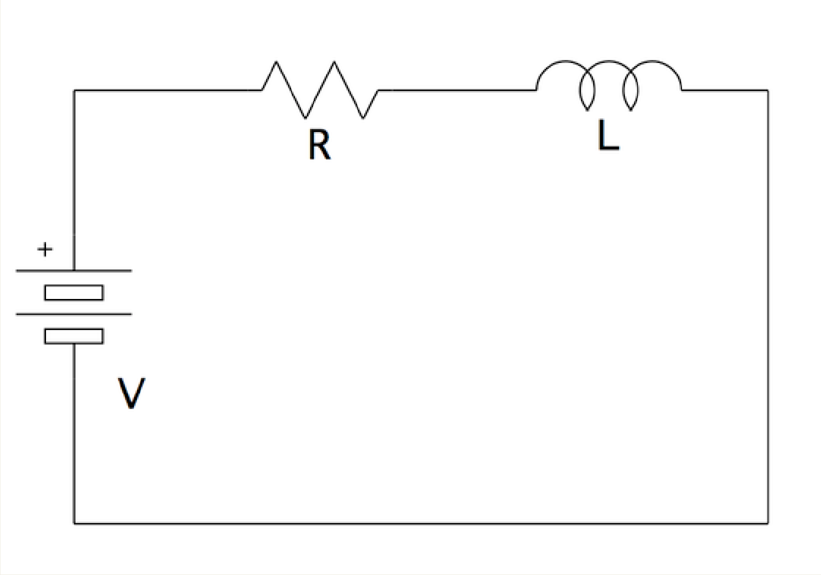


Birinci Dereceden Sistemlerin Birim Rampa Yanıtı

t sonsuza yaklaşırken, $e^{-t/\tau}$ sıfıra yaklaşır ve dolayısıyla e(t) hata sinyali T'ye yaklaşır. Yeterince büyük t için birim rampa girişini takip etme hatası τ'ye eşittir. Zaman sabiti τ ne kadar küçükse, rampa girişini takip etmedeki kararlı durum hatası o kadar küçüktür.

Cevabın zamana göre değişimi Şekil 3'teki gibi birim rampa girişi, kalıcı durumda r zaman sabiti farkıyla izlemeye çalışan bir eğridir. Birinci dereceden kontrol sisteminin birim rampa giriş için kalıcı durum hatası, hatanın son değeri sınırlı olduğuna göre sistemin hata fonksiyonuna son değer teoremi uygulanarak belirlenebilir.

Birinci Dereceden Sistem Örneği



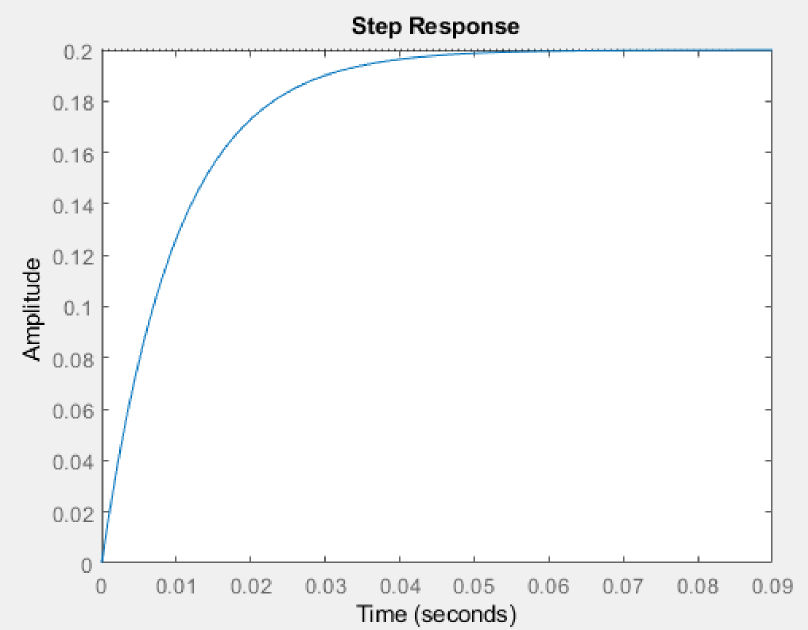
$$V(t) = I(t) * R + L\frac{dI(t)}{dt}$$

$$V(s) = RI(s) + sLI(s)$$

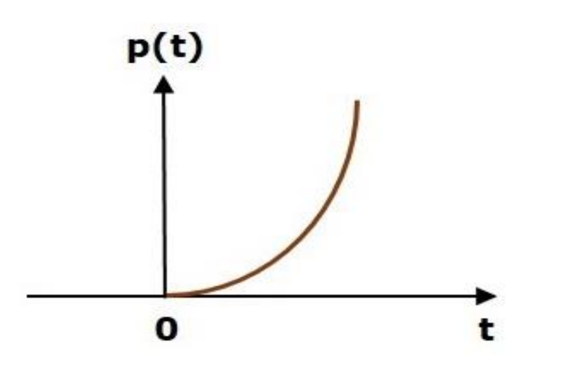
$$\frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{sL + R}$$

Eğer, R=5 ohm ve L=0.05H seçilirse:

$$\frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{0.05s + 5}$$



Birinci Derece Sistemlerin Birim-Parabolik Tepkisi



$$r(t) = \frac{t^2}{2} u(t)$$

$$R(s) = \frac{1}{s^3}$$

$$G(s) = \frac{1}{s\tau}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s\tau + 1}$$

$$C(s) = R(s) \frac{1}{s\tau+1}$$

$$C(s) = \frac{1}{s^3} \frac{1}{s\tau+1}$$

Kısmi kesirlere ayıralım

$$\frac{1}{s^3} \frac{1}{1+s\tau} = \frac{A}{s^3} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s} + \frac{D}{1+s\tau}$$

$$\frac{1}{s^3(1+s\tau)} = \frac{A(1+s\tau)+Bs(1+s\tau)+Cs^2(1+s\tau)+Ds^3}{s^3(1+s\tau)}$$

Birinci Derece Sistemlerin Birim-Parabolik Tepkisi

Sadeleştirelim

$$1 = A + (A\tau+B)s + (B\tau+C)s^2\ (C\tau+D)s^3$$

$$A = 1$$

$$\tau+B = 0$$
$$B = -\tau$$

$$-\tau(\tau) + C = 0$$
$$C = \tau^2$$

$$\tau^2(\tau)+D = 0$$
$$D = -\ \tau^3$$

Birinci Derece Sistemlerin Birim-Parabolik Tepkisi

$$C(s) = \frac{1}{s^3} - \frac{\tau}{s^2} + \frac{\tau^2}{s} - \frac{\tau^3}{1+s\tau}$$

$$C(s) = \frac{1}{s^3} - \frac{\tau}{s^2} + \frac{\tau^2}{s} - \frac{\tau.\tau^2}{\tau(s+\frac{1}{\tau})}$$

$$C(s) = \frac{1}{s^3} - \frac{\tau}{s^2} + \frac{\tau^2}{s} - \frac{\tau^2}{(s+\frac{1}{\tau})}$$

Birinci Derece Sistemlerin Birim-Parabolik Tepkisi

Ters Laplace'ını alalım:

$$c(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s^3} - \frac{\tau}{s^2} + \frac{\tau^2}{s} - \frac{\tau^2}{(s+\frac{1}{\tau})}\right]$$

$$c(t) = \left[\frac{t^2}{2} - \tau t + \tau^2 - \tau^2 e^{-\frac{t}{\tau}}\right]u(t)$$

Yanıtın kalıcı durum kısmı: (t=∞'da sonsuza doğru gidiyor)

$$\left(\frac{t^2}{2} - \tau t + \tau^2\right) u(t)$$

Yanıtın geçici durum kısmı: (t=∞'da sıfır)

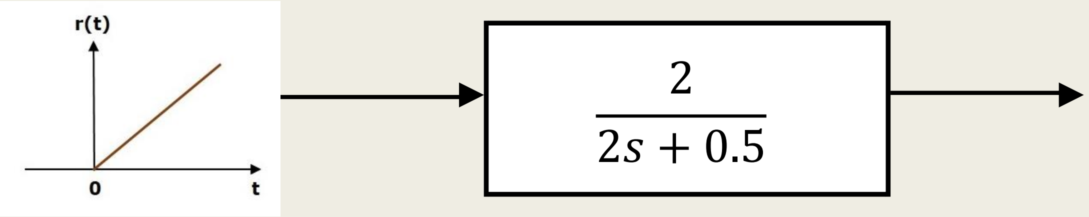
$$\left(-\tau^2 e^{-\frac{t}{\tau}}\right) u(t)$$

ÖRNEK

Transfer fonksiyonu:

$$G(s) = \frac{2}{2s + 0.5}$$

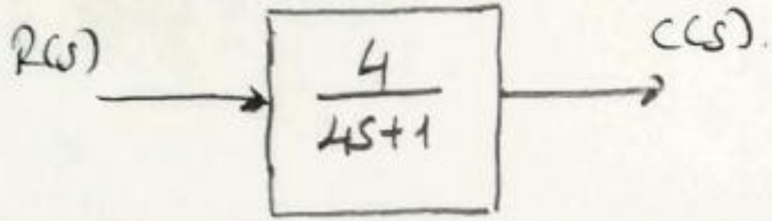
Olan birinci dereceden bir kontrol sisteminin girişine birim rampa fonksiyonu uygulanıyor. Bu sistemin 3. saniyedeki hata miktarını bulunuz.



$R(s)$ $G(s)$ $C(s)$

ÖRNEK

$G(s) = \dfrac{2}{2s+0{,}5} \Rightarrow G(s) = \dfrac{4}{4s+1}$ haline getirilebilir.



$G(s) = \dfrac{4}{4s+1} = 4 \cdot \dfrac{1}{4s+1} \Rightarrow$ Birinci derece sistemin zaman sabiti

$\tau = 4$

$R(s) = \dfrac{1}{s^2} \Rightarrow \quad C(s) = \dfrac{1}{s^2} \cdot \dfrac{4}{4s+1}$

ÖRNEK

Birinci derece sistemlerin birim rampa yanıtı:

$$c(t) = t - \tau + \tau . e^{-t/\tau}$$

Bu durumda;

$$c(t) = 4 . (t - 4 + 4 . e^{-t/4})$$

Hatayı bulmak için giriş sinyalinden çıkış sinyalini çıkartmak gerektir.

Giriş : rampa $r(t) = t$

Çıkış $c(t) = 4 . (t - 4 + 4 . e^{-0.25t})$

$$e(t) = r(t) - c(t)$$

$$e(t) = t - 4t + 16 - 16 . e^{-0.25t}$$

ÖRNEK

3. soru devamı ↓

$$e(t) = -3t + 16 - 16e^{-0.25t}$$

t = 3 saniye için

$$e(3) = -9 + 16 - 16 \cdot e^{-0.75}$$

$$e(3) = -0,5579$$

ÖRNEK