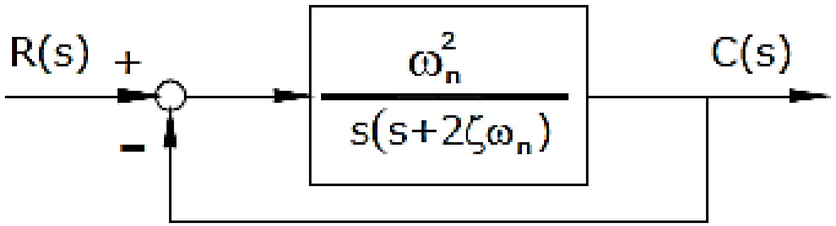
GEÇİCİ DURUM YANITLARI

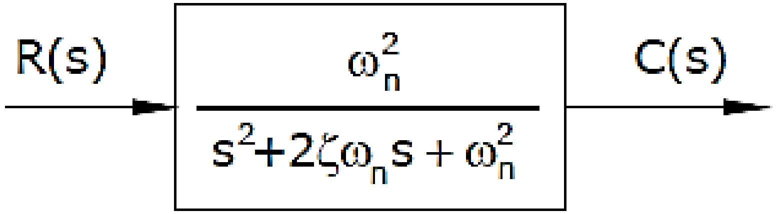
2. DERECE SİSTEMLER

İkinci derece sistem polinomları

İkinci Dereceden Sistemlerin Geçici ve Kalıcı Durum Cevabı



İkinci mertebeden bir sistemin kapalı çevrim blok diyagramı



Yandaki sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonu

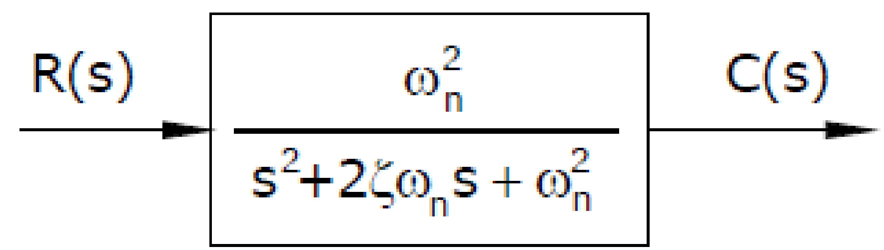
Yukarıdaki sistem standart ikinci derece sistem olarak adlandırılır. Bazı kaynaklar bu tarz sistemlere Titreşim tipi sistemler adını da vermektedir. Standart ikinci dereceden kapalı çevrim sistemin karakteristik denklemi:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

Buradan sistemin kutupları aşağıdaki gibi bulunur:

$$s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -\sigma \pm j\omega_d$$

Dr. Hakan Terzioğlu Ders notlarından alınmıştır.



2. Derece sistemlerin dinamik davranışları ζ ve ω_n kullanılarak ifade edilebilir.

Doğal Frekans, ω_n: İkinci derece bir sistemin doğal frekansı sistemin sönümsüz osilasyon frekansıdır.

Sönüm oranı, ζ: Üstel düşüm frekansının doğal frekansa oranıdır.

Birinci derece sistemlerde parametrenin değişimi sadece sistemin cevap hızını etkiler ama ikinci derece sistemlerde parametre değişimi cevabın şeklini de değiştirebilir.

Dr. Hakan Terzioğlu Ders notlarından alınmıştır.

İkinci derece sistem polinomları

İkinci Dereceden Sistemlerin Geçici ve Kalıcı Durum Cevabı

Sönüm oranı ζ'ya bağlı olarak karakteristik denklemin kutupları 4 farklı kategoride incelenebilir.

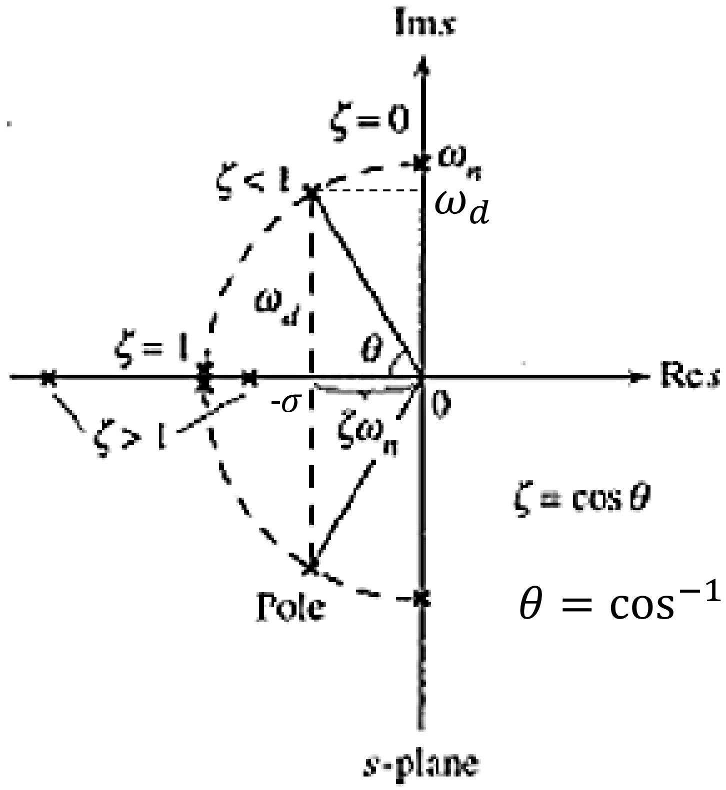
1. Eğer $\boldsymbol{\zeta = 0}$ ise, s_1 ve s_2 tamamen kompleks eşleniktir $(s_{1,2} = \mp j\omega_n)$ ve geçici zaman cevabı sona ermez.
2. Eğer $\boldsymbol{0 < \zeta < 1}$, Kapalı çevrim kutupları s_1 ve s_2 negatif gerçek kısmı olan komplex eşlenik kutuplardır $(s_{1,2} = -\sigma \mp j\omega_d)$. Bu tarz sistemlere az sönümlü (***under damped***) sistemler adı verilir.
3. Eğer $\boldsymbol{\zeta = 1}$, bu durumda sistem kritik sönümlüdür. Kapalı çevrim sistemin negatif ve gerçek katlı kutupları $(s_{1,2} = -\omega_n)$.
4. $\boldsymbol{\zeta > 1}$ durumunda fazla sönümlü sistem cevabı elde edilir. Sistemin kutupları negatif, farklı iki gerçek sayıdır $(s_{1,2} = -\sigma \mp \omega_d)$.

Dr. Hakan Terzioğlu Ders notlarından alınmıştır.

Sönüm Oranı

İkinci Dereceden Sistemlerin Geçici ve Kalıcı Durum Cevabı

Aşağıdaki şekil, sönüm oranı ζ alternatiflerine bağlı olarak sistem kutupların durumunu s-düzlemi üzerinde göstermektedir.



$\zeta = \cos\theta$

$$\theta = \cos^{-1}\zeta$$

Sönüm oranı ζ ile kapalı çevrim sistem kutupları arasındaki ilişki.

Dr. Hakan Terzioğlu Ders notlarından alınmıştır.

İkinci Dereceden Sistemlerin Birim-Basamak Girişine Yanıtları

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2} \qquad R(s) = \frac{1}{s}$$

$$\zeta = 0 \ olduğunda;$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2}$$

$$\Rightarrow C(s) = \left(\frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2}\right) R(s)$$

$$C(s) = \left(\frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2}\right)\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + \omega_n^2)}$$

$$c(t) = (1 - \cos(\omega_n t))\, u(t)$$

İkinci Dereceden Sistemlerin Birim-Basamak Girişine Yanıtları

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2} \qquad R(s) = \frac{1}{s}$$

$$\zeta = 1 \; olduğunda;$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\Rightarrow C(s) = \left(\frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2}\right) R(s)$$

$$C(s) = \left(\frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2}\right)\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{\omega_n^2}{s(s+\omega_n)^2}$$

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+\omega_n)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+\omega_n} + \frac{C}{(s+\omega_n)^2}$$

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\omega_n} - \frac{\omega_n}{(s+\omega_n)^2}$$

$$c(t) = (1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t})u(t)$$

İkinci Dereceden Sistemlerin Birim-Basamak Girişine Yanıtları

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2} \qquad R(s) = \frac{1}{s}$$

$$0 < \zeta < 1 \; olduğunda;$$

$$s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2 = (s + \zeta w_n)^{\,2} + w_n^2(1 - \zeta^2)$$

$$C(s) = \frac{w_n^2}{(s + \zeta w_n)^{\,2} + w_n^2(1 - \zeta^2)} * (\frac{1}{s})$$

$$C(s) = \frac{w_n^2}{s((s + \zeta w_n)^{\,2} + w_n^2(1 - \zeta^2))}$$

Kısmi kesirlere ayıralım:

$$C(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{(s + \zeta w_n)^{\,2} + w_n^2(1 - \zeta^2)}$$

İkinci Dereceden Sistemlerin Birim-Basamak Girişine Yanıtları

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2} \qquad R(s) = \frac{1}{s}$$

$$0 < \zeta < 1 \; olduğunda;$$

Sadeleştirdikten sonra, A, B ve C değerlerini sırasıyla 1,-1 ve -2δωn olarak elde edilir. Bu değerleri C(s)'nin yukarıdaki kısmi kesir açılımında yerine koyalım.

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta w_n}{(s + \zeta w_n)^2 + w_n^2(1 - \zeta^2)} - \frac{\zeta w_n}{(s + \zeta w_n)^2 + w_n^2(1 - \zeta^2)}$$

$$c(t) = \left(1 - \left(\frac{e^{-\zeta w_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\right)\sin(w_d t + \theta)\right)u(t)$$

İkinci Dereceden Sistemlerin Birim-Basamak Girişine Yanıtları

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2} \qquad R(s) = \frac{1}{s}$$

$$\zeta > 1\ olduğunda;$$

$$s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2 = (s + \zeta w_n)^2 + w_n^2(1 - \zeta^2)$$

$$C(s) = \frac{w_n^2}{(s + \zeta w_n)^2 + w_n^2(1 - \zeta^2)} * (\frac{1}{s})$$

$$C(s) = \frac{w_n^2}{s((s + \zeta w_n)^2 + w_n^2(1 - \zeta^2))}$$

İkinci Dereceden Sistemlerin Birim-Basamak Girişine Yanıtları

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2} \qquad R(s) = \frac{1}{s}$$

$$\zeta > 1 \; olduğunda;$$

Kısmi kesirlere ayıralım:

$$C(s) = \frac{A}{s} - \frac{B}{s + \zeta w_n + w_n\sqrt{\zeta^2 - 1}} - \frac{C}{s + \zeta w_n - w_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

A=1 olmak üzere

$$c(t) = 1 + Be^{-(\zeta w_n + w_n\sqrt{\zeta^2-1})t} + Ce^{-(\zeta w_n - w_n\sqrt{\zeta^2-1})t}$$

<u>Birim Basamak Yanıtları:</u>

- Aşırı Sönümlü (Fazla Sönümlü) $\zeta > 1$
- Sönümlü (Az Sönümlü) $0 < \zeta < 1$
- Kritik Sönümlü $\zeta = 1$
- Osilasyonlu $\zeta = 0$

Aşırı Sönümlü: İki kök reel eksen üzerindeyken oluşan cevabdır.

Aşırı (Fazla) Sönümlü

$$\zeta > 1$$

$$G(s) = \frac{9}{s^2 + 9s + 9}$$

$$\zeta = 1.5$$
$$\omega_n = 3$$

$$R(s) = \frac{1}{s} \longrightarrow G(s) = \frac{9}{s^2 + 9s + 9} \longrightarrow C(s) = \frac{1}{s} * \frac{9}{s^2 + 9s + 9}$$

Birim Basamak

Çıkış

Ters Laplace dönüşümü yapalım:
Bunun için kısmi kesirlere ayırmalıyız:

MATLAB YARDIMI

```
syms s
pay=[9]
payda=[1 9 9 0]
[r, p, k]=residue(pay,payda)
```

```
r =
   0.1708
  -1.1708
   1.0000

p =

  -7.8541
  -1.1459
        0

k =

    []
```

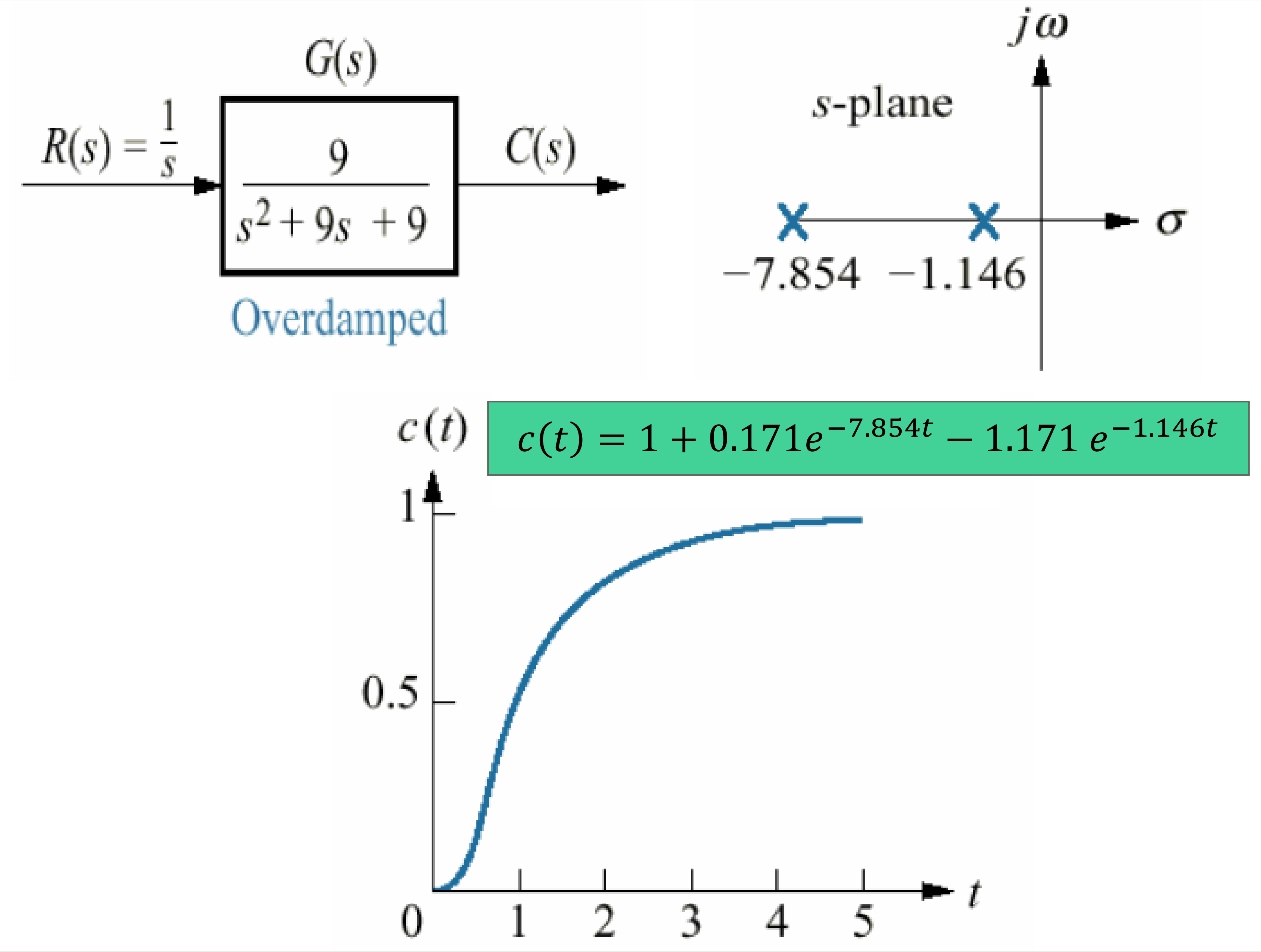
$$C(s) = \frac{9}{s(s+7.854)(s+1.146)}$$

Kısmi kesirlere ayırma sonrası çıkış ifadesi:

$$C(s) = \frac{0.171}{s+7.854} - \frac{1.171}{s+1.146} + \frac{1}{s}$$

Ters Laplace dönüşümü sonrası çıkış ifadesi:

$$c(t) = 1 + 0.171e^{-7.854t} - 1.171\, e^{-1.146t}$$

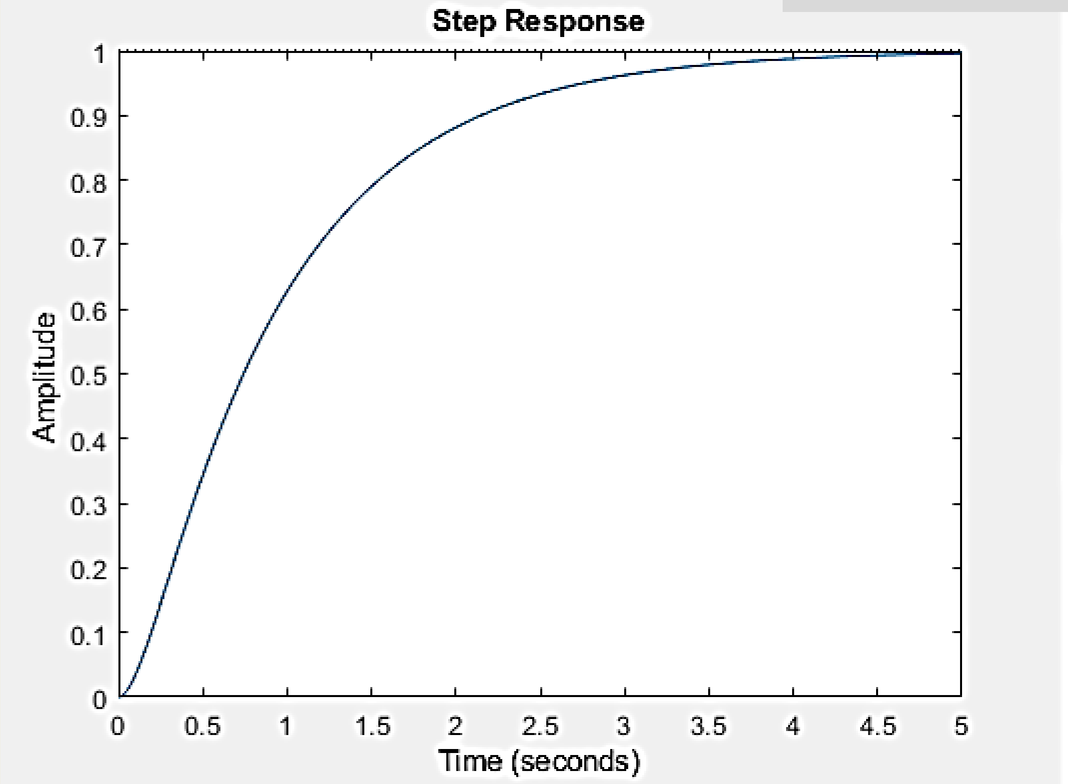


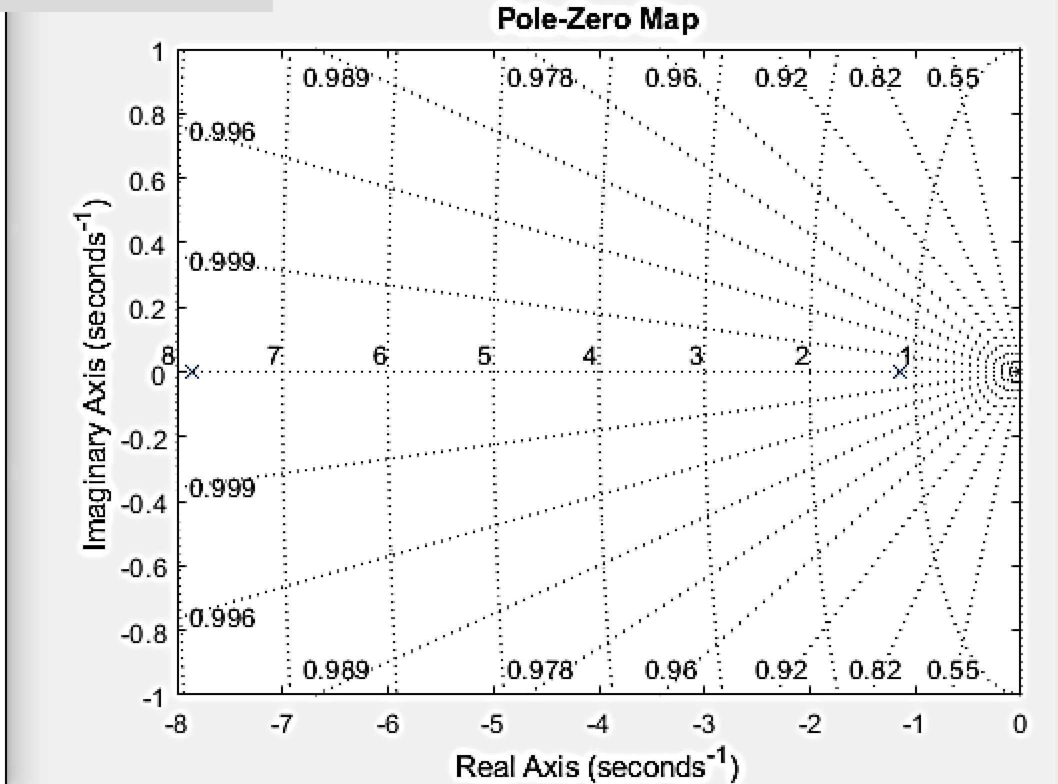
$$c(t) = 1 + 0.171e^{-7.854t} - 1.171\, e^{-1.146t}$$

Prof. Dr. Galip Cansever Ders notlarından alınmıştır.

MATLAB YARDIMI

```
clear;close all
y=tf(9,[1 9 9]);
step(y)
xlim([0 5])
figure
pzmap(y), grid
damp(y)
```





Published with MATLAB® 2018

Örnek olarak az sönümlü bir sistem ele alalım:

AZ SÖNÜMLÜ

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{9}{s^2+2s+9} \rightarrow \begin{matrix}\zeta = 0.33\\ \omega_n = 3\end{matrix} \quad 0<\zeta<1$$

Bu sistemin birim basamak yanıtı:

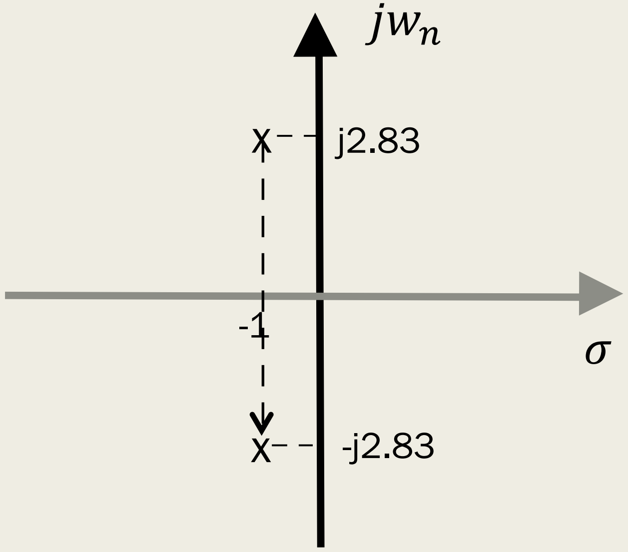
$$C(s)=\frac{9}{s^2+2s+9}*\frac{1}{s}=\frac{9}{s(s^2+2s+9)}$$

$$w_d = w_n\sqrt{1-\zeta^2} = 3*\sqrt{1-0.33^2} = 2.83 rad/s$$

$$\sigma = \zeta w_n = 3*0.333 \cong 1$$

$$\theta = \cos^{-1}\zeta = \cos^{-1}0.33 = 1.231 rad$$

$$s_{1,2} = -1 \pm j2.83$$



$$c(t)=\left(1-\left(\frac{e^{-\zeta w_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\sin(w_d t+\theta)\right)=1-\frac{e^{-t}}{0.94}\sin(2.83t+1.23)$$

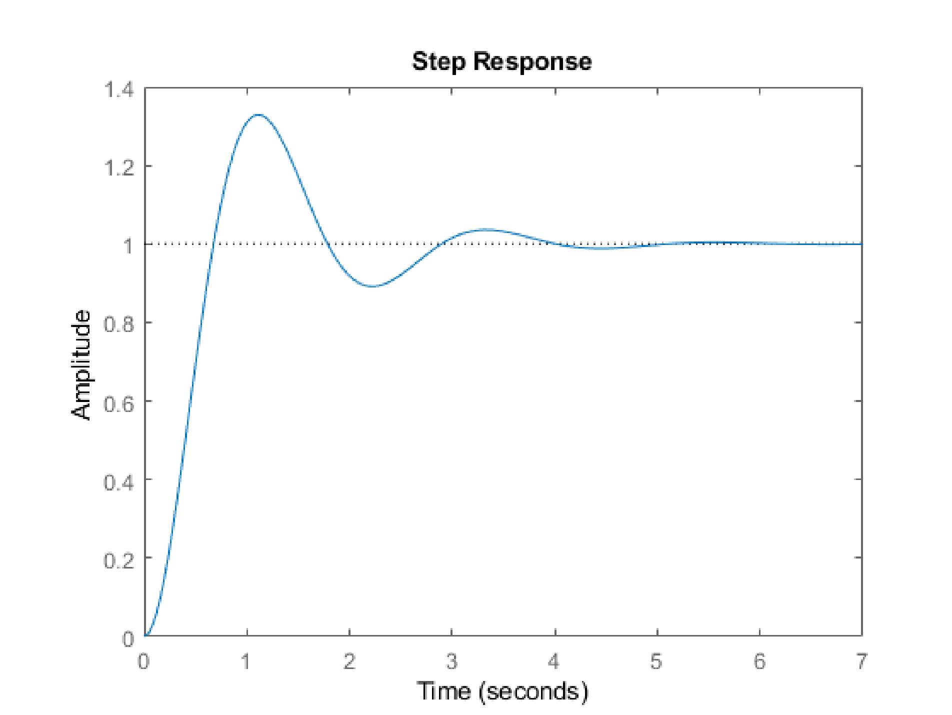
MATLAB YARDIMI

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-t}}{0.94}\sin(2.83t + 1.23)$$

```
% 1. yol
t=0:0.1:6;
y=1-(exp(-t).*sin(2.83*t+1.23)/0.94);
figure
plot(t,y)
```

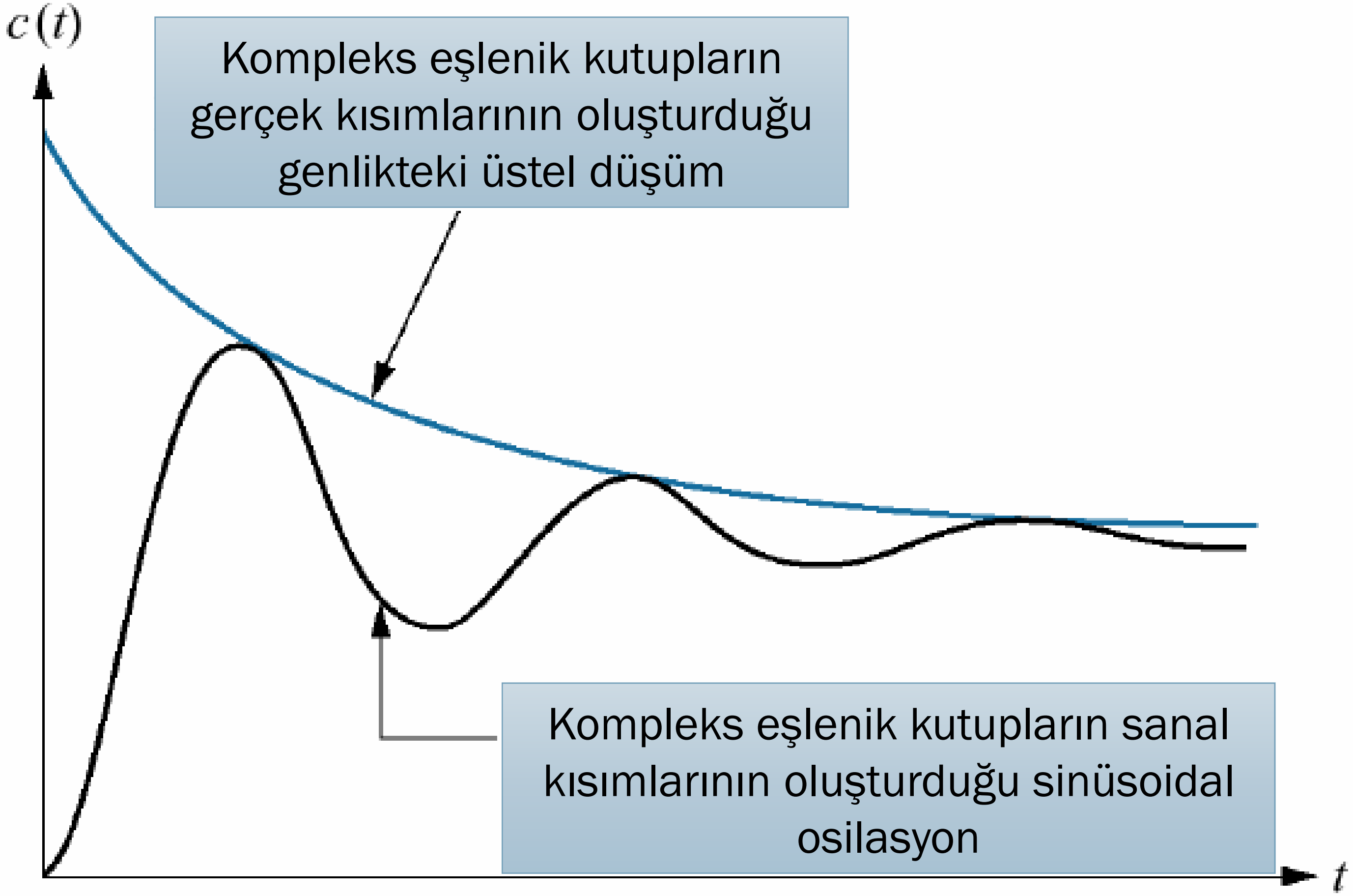
$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{9}{s^2 + 2s + 9}$$

```
%% 2. yol
figure
z=tf(9,[1 2 9]);
step(z);
```



Kutbun reel kısmı sinioidalin genliğinin üstel düşüm frekansına karşılık gelirken, imajiner kısmı ise sinüsoidalin osilasyon frekansına karşılık gelir.

Genel olarak;

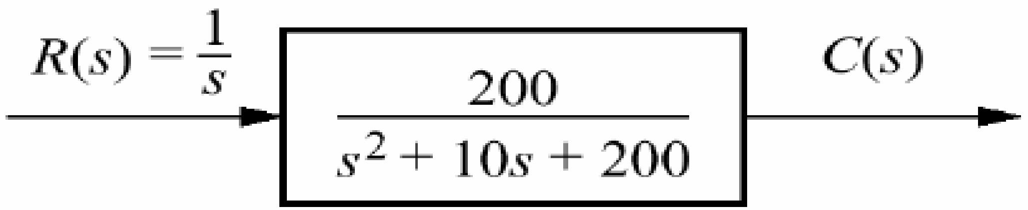


Bu tür cevaplara sönümlü cevaplar adı verilir ve kararlı hale sönümlü osilasyon ile ulaşır.

Sinüsoidal'ın frekansına *sönümlü osilasyon frekansı denir,* ω_d

Prof. Dr. Galip Cansever Ders notlarından alınmıştır.

Örnek:



Sisteminin birim basamak cevabını yazınız.

$$\boldsymbol{\zeta = 0,354}$$

$$\boldsymbol{\omega_n = 14,14}$$

Eşlenik kutuplar: $s_{1,2}$=-5±j13.23

$$w_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 14,14 * \sqrt{1-0,354^2} = 13,23$$

$$\sigma = \zeta\omega_n = 0,354 * 14,14 = 5$$

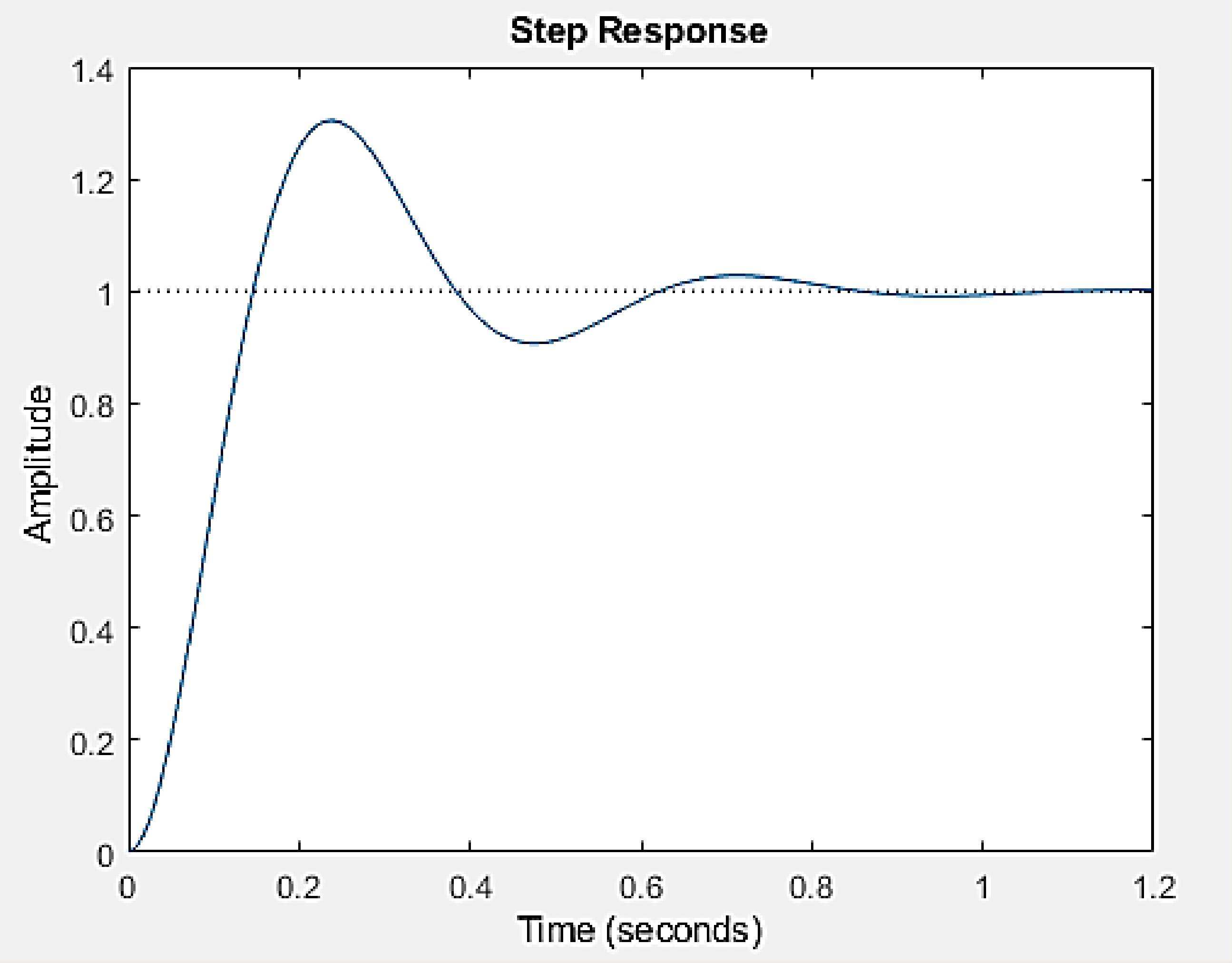
$\theta = cos^{-1}\,\zeta \rightarrow cos^{-1}\,(0,354)$
$\theta = 1,2 \text{ rad/s}$

$$c(t) = \left(1 - \left(\frac{e^{-\zeta w_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\sin(w_d t + \theta)\right)$$

$$c(t) = 1 - \frac{1}{0,91} * e^{-5t} * \sin(13,23t + 1,2)$$

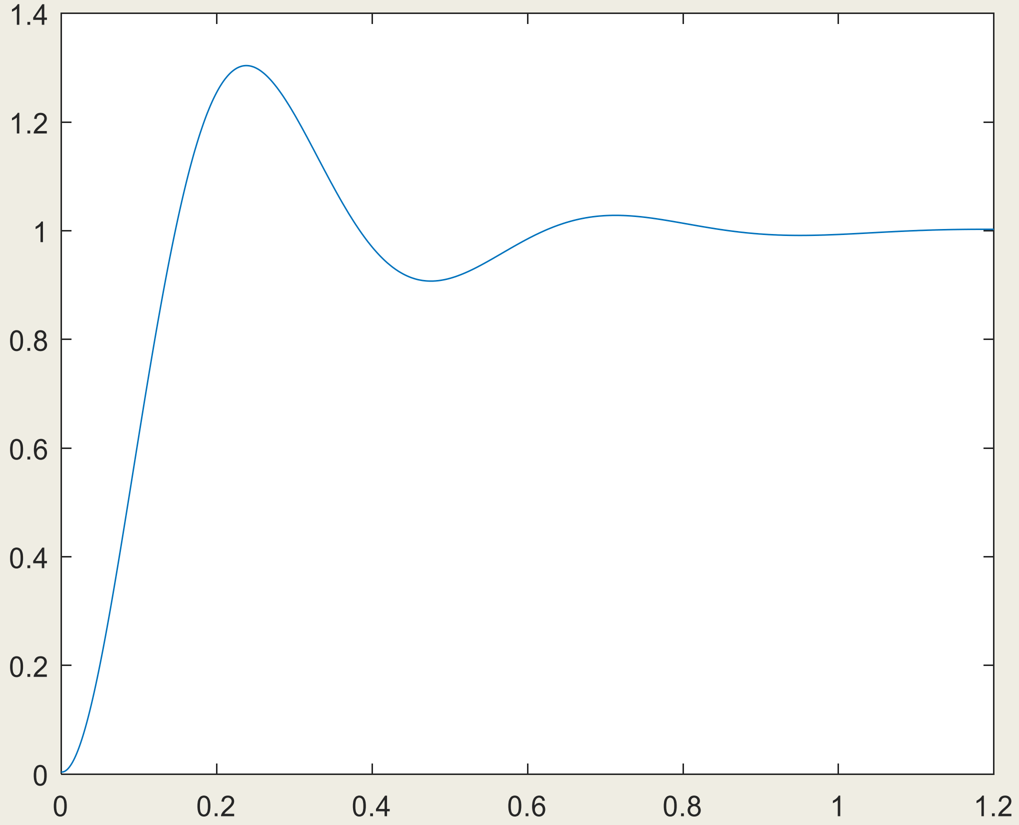
MATLAB YARDIMI

```
y=tf(200,[1 10 200]);
step(y)
```



MATLAB YARDIMI

```
t=0:0.001:1.2;
y=1-((14.14/13.23)*exp(-5*t).*sin(13.23.*t+1.2));
figure
plot(t,y)
```



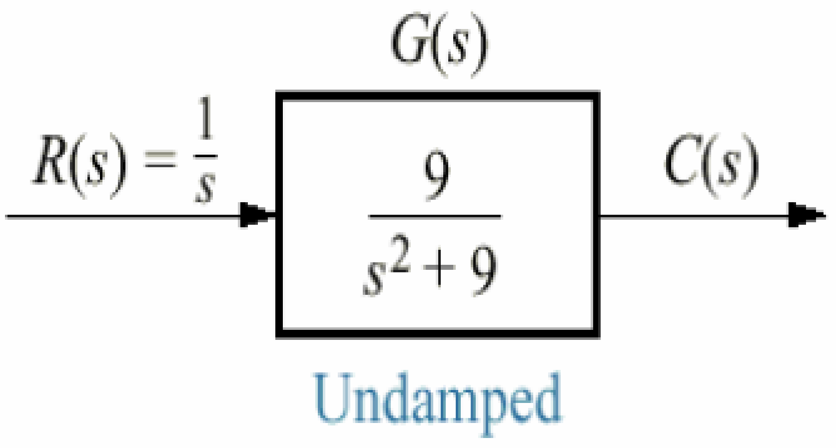
Osilasyonlu Cevap: İki kök imajiner eksen üzerindeyken oluşan cevabdır.

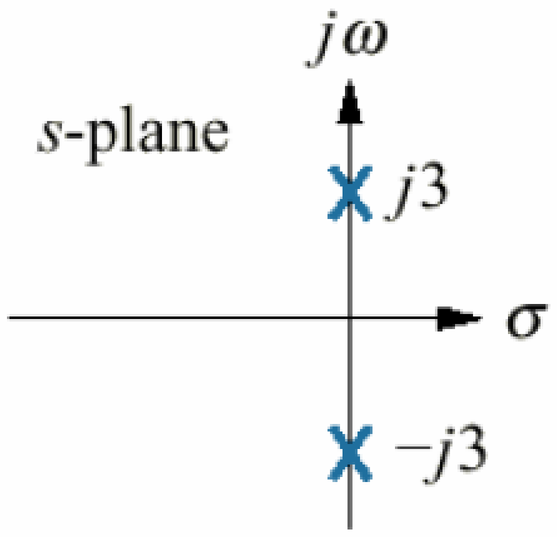
Undamped

$$C(s) = \frac{9}{s(s^2+9)}$$

Olarak seçelim $\zeta = 0$

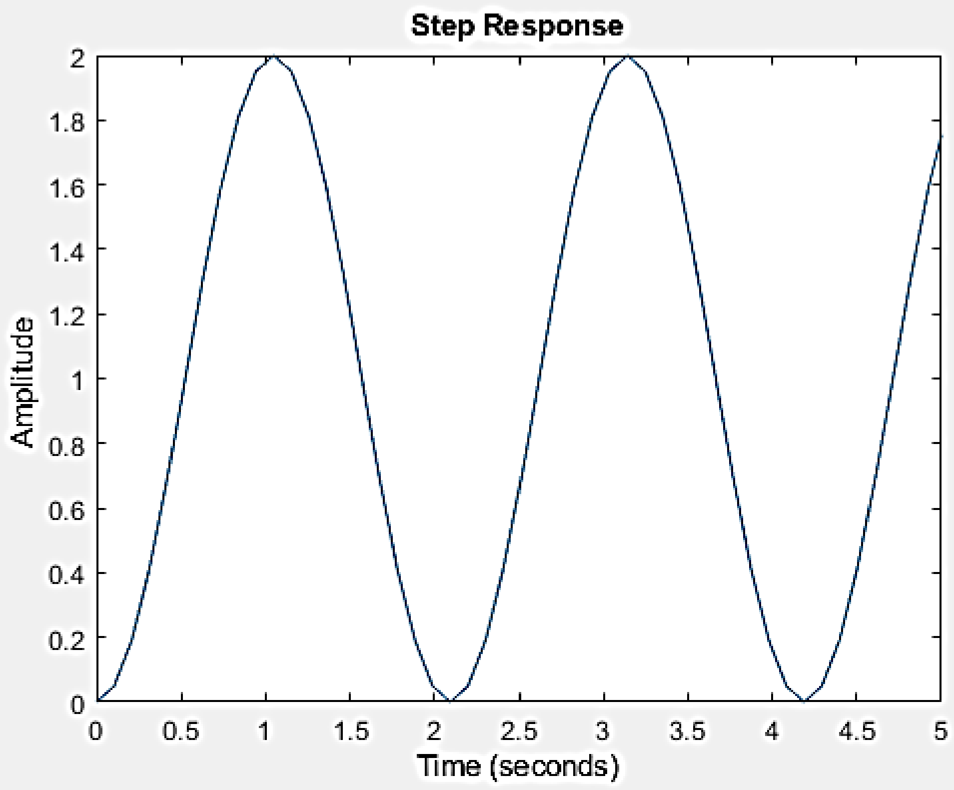
Orjindeki giriş sabit zorlanmış cevabı oluştururken imajiner eksen üzerinde **±3j** deki kutuplar sinüsodial doğal cevap oluşturur.

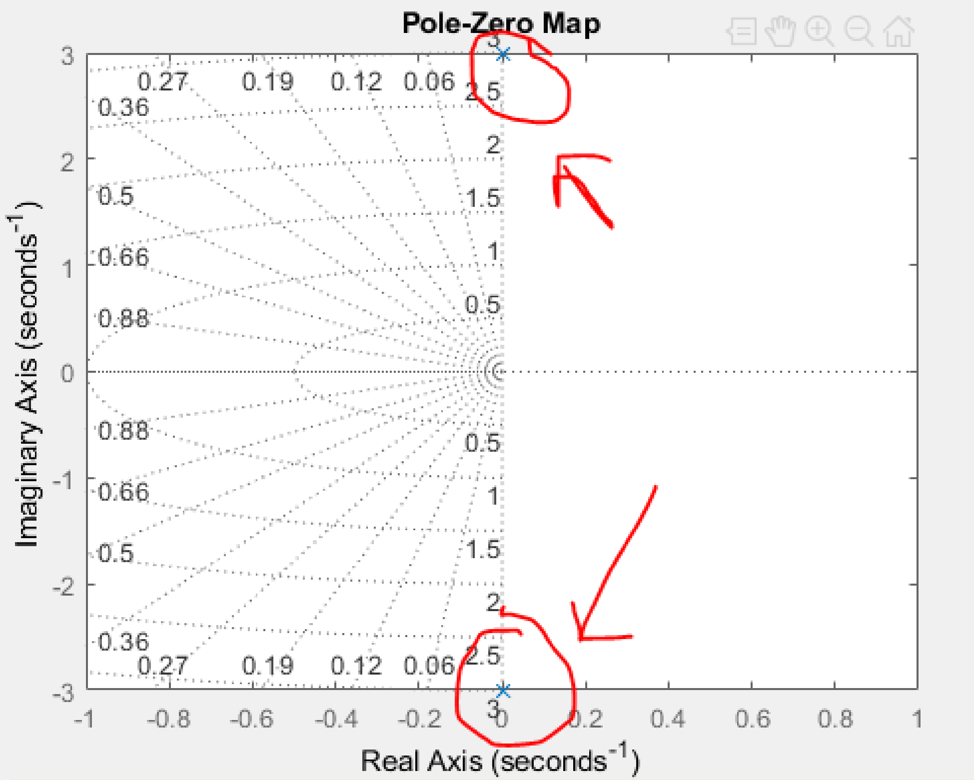




MATLAB YARDIMI

```
clear;close all
y=tf(9,[1 0 9]);
step(y)
xlim([0 5])
figure
pzmap(y), grid
```

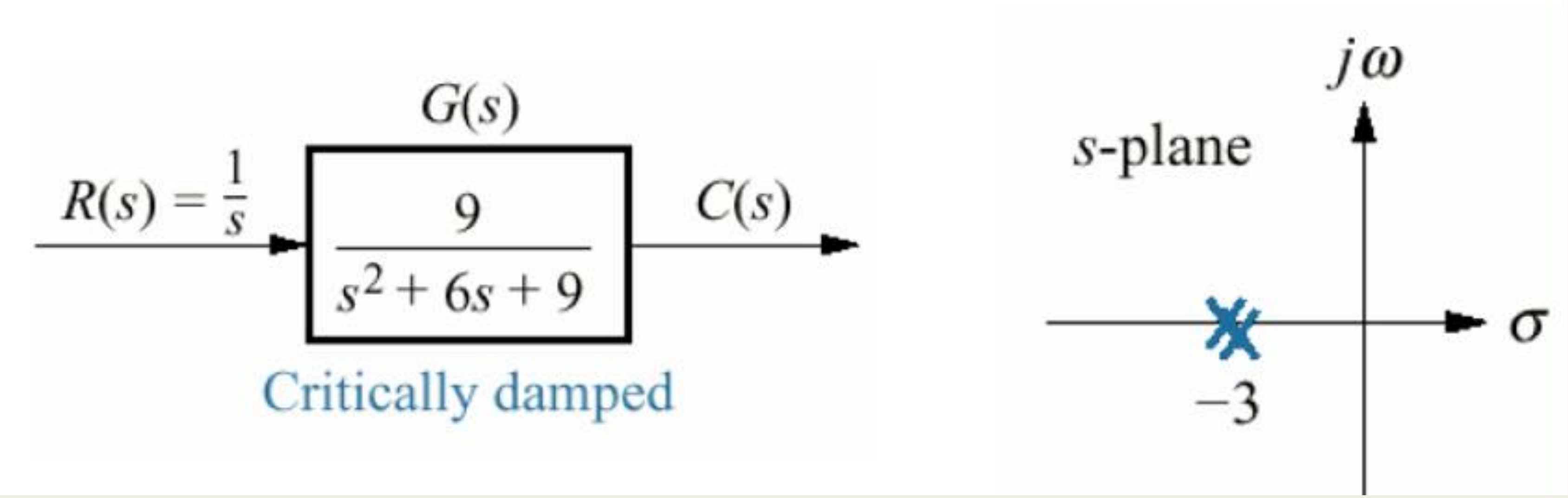




KRİTİK SÖNÜMLÜ

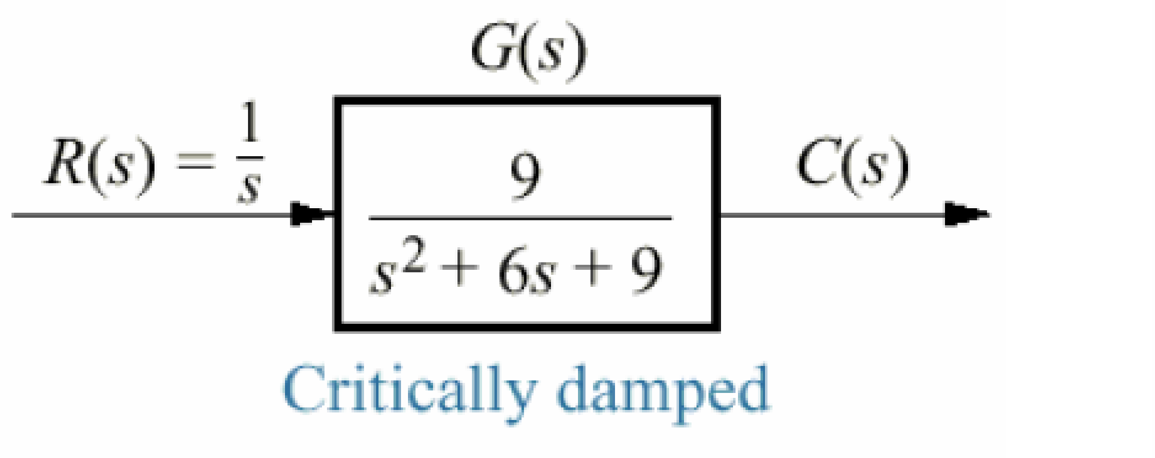
: İki katlı kök reel eksen(negatif bölge) üzerindeyken oluşan cevabdır.

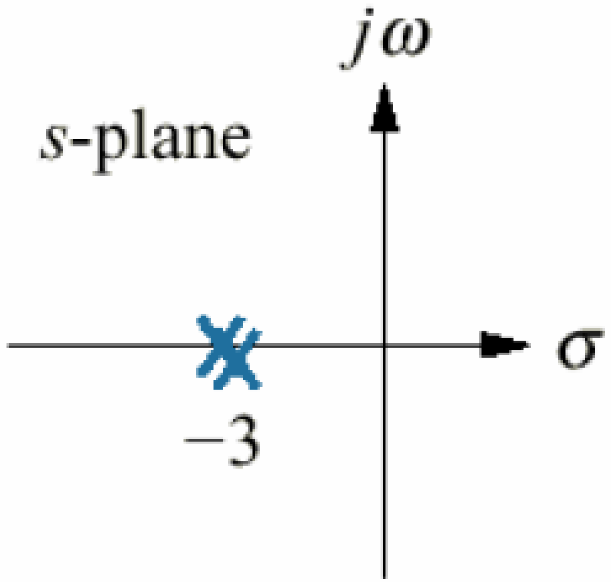
$$\zeta = 1$$



Kritik Sönümlü Cevap: İki katlı kök reel eksen(negatif bölge) üzerindeyken oluşan cevabdır.

$$C(s) = \frac{9}{s(s^2 + 6s + 9)} = \frac{9}{s(s+3)^2}$$ Olarak seçelim





$$c(t) = (1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t})u(t)$$

Orjindeki giriş sabit zorlanmış cevabı oluştururken reel eksen üzerinde **-3** deki kutuplar üstel ve üstel ile zamanın çarpımı doğal cevabı oluştururlar.

MATLAB YARDIMI

```
syms s
pay=[9]
payda=[1 6 9 0]
[r, p, k]=residue(pay,payda)
```

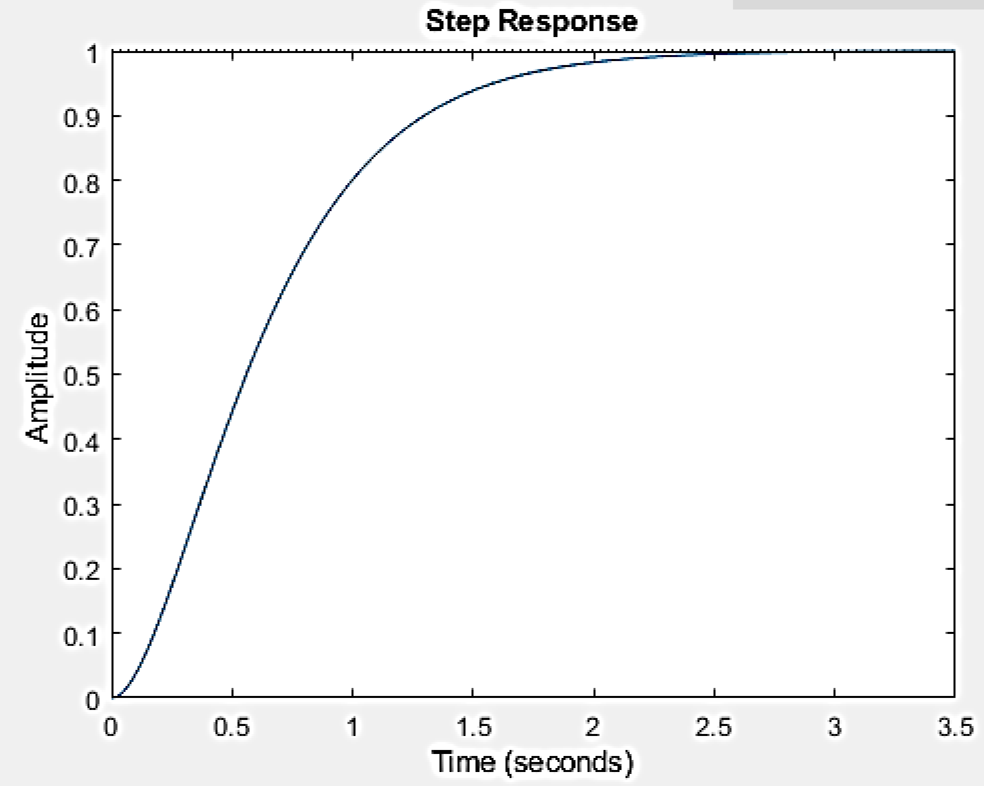
```
r =
    -1
    -3
     1


p =
    -3
    -3
     0


k =
     []
```

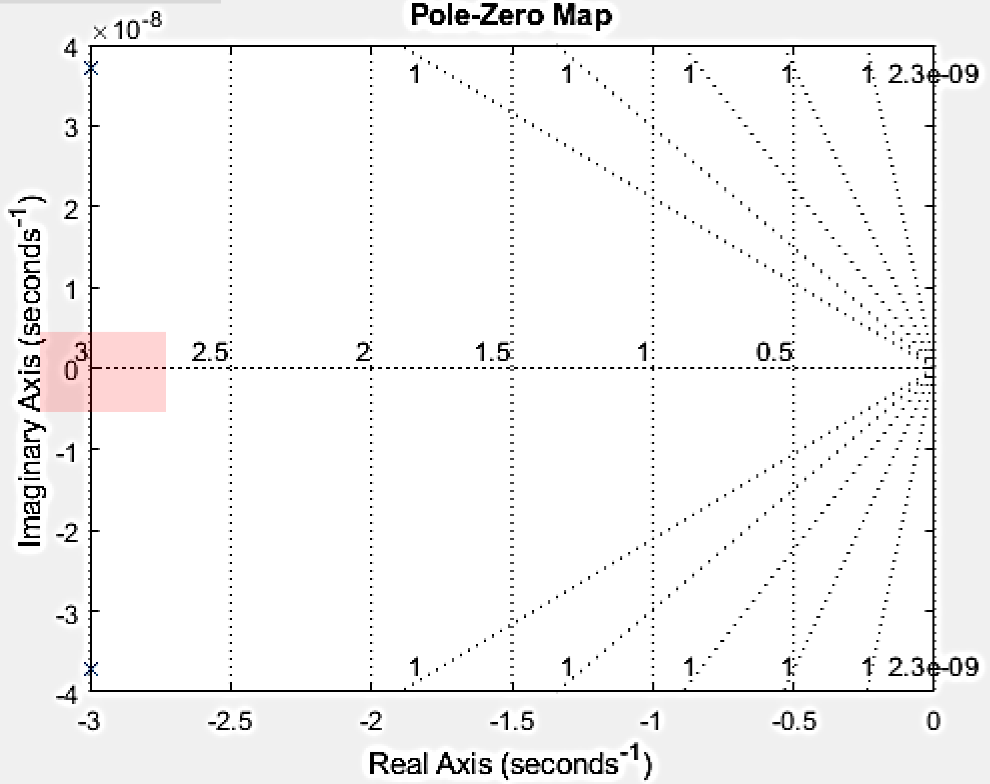
$$c(s) = -\frac{1}{s+3} - \frac{3}{(s+3)^2} + \frac{1}{s}$$

$$c(t) = -1e^{-3t} - 3te^{-3t} + 1$$

MATLAB YARDIMI

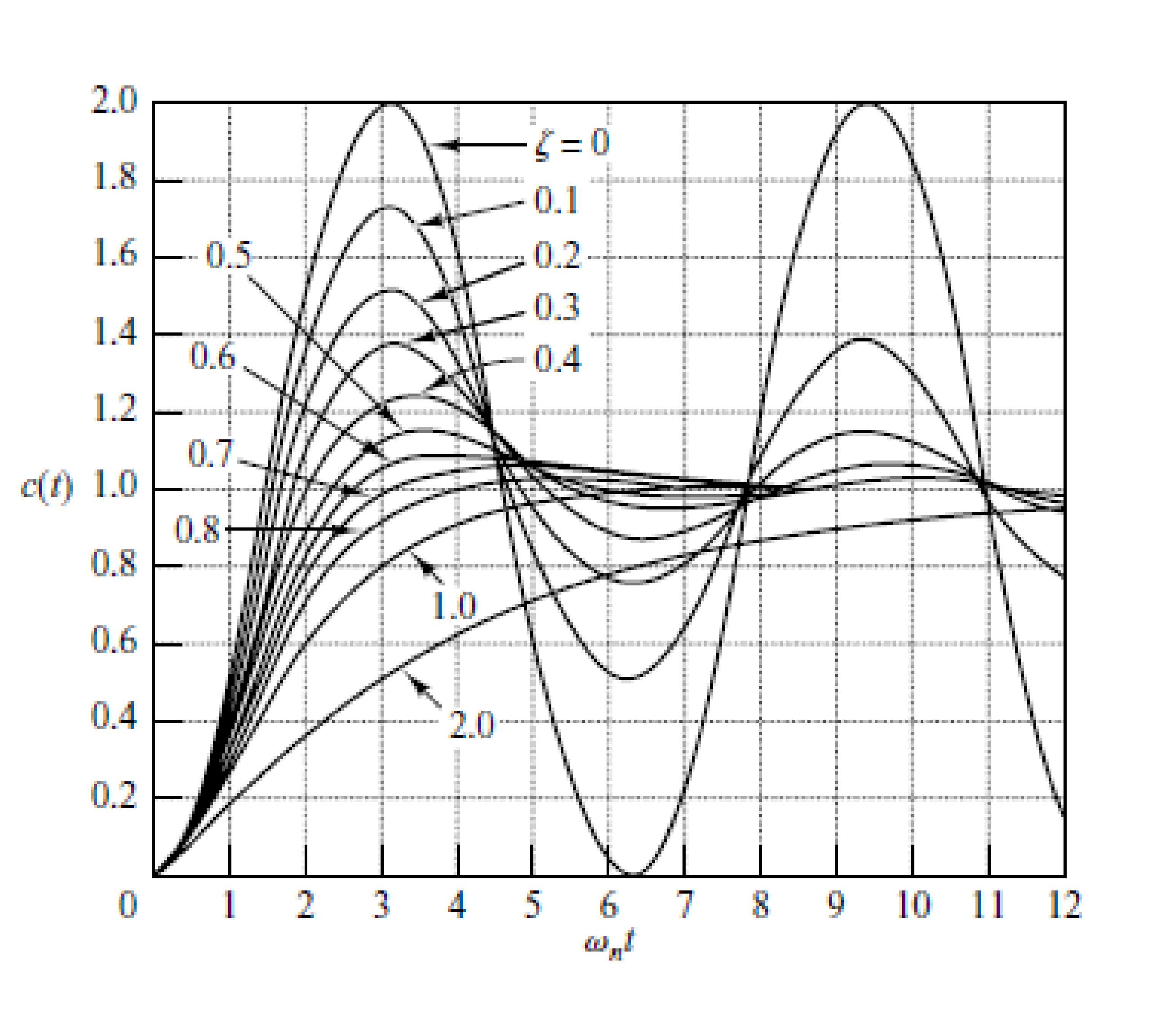
```
clear;close all
y=tf(9,[1 6 9]);
step(y)
figure
pzmap(y), grid
```





GİRİŞ

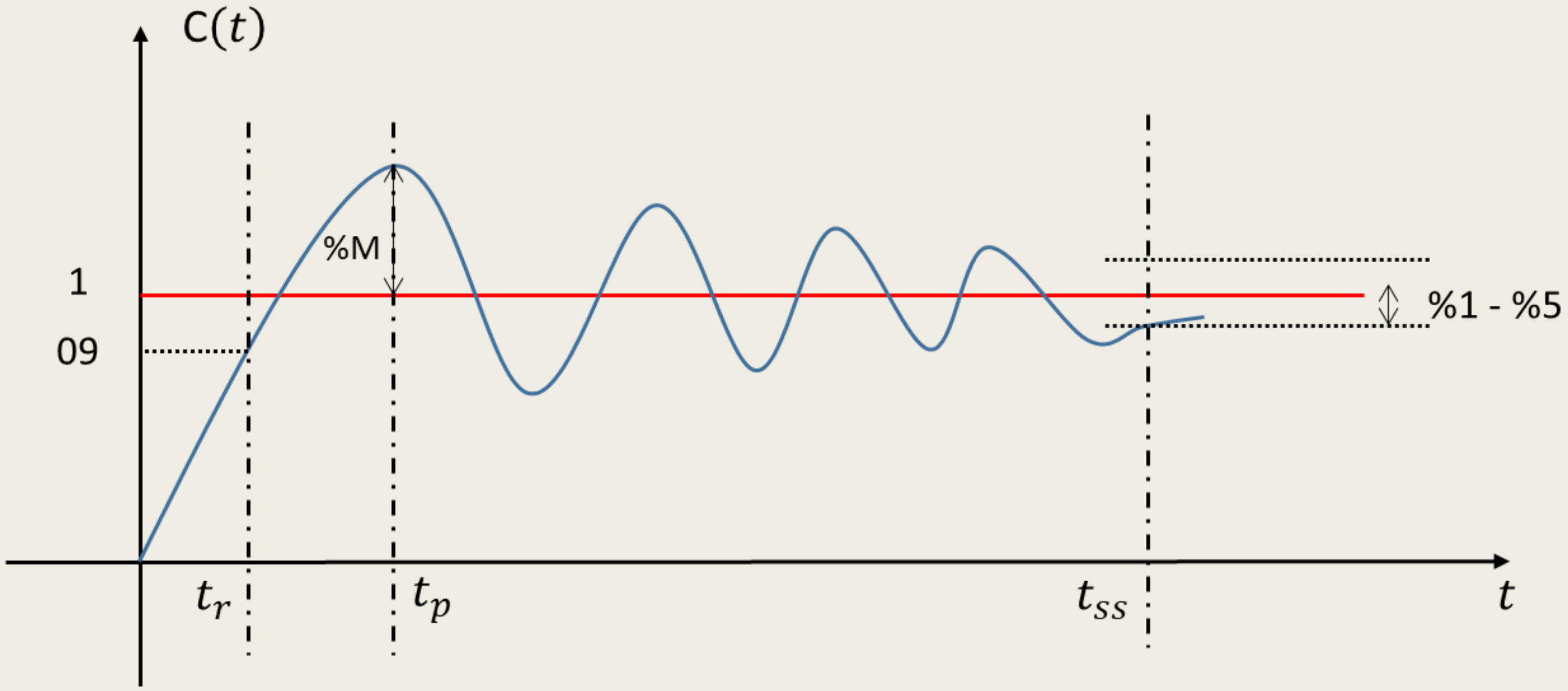
Değişen sönüm oranları ile İkinci derece sistem cevabı



Sönüm katsayısı küçüldükçe çıkış daha osilasyonlu olur.

Dr. Hakan Terzioğlu Ders notlarından alınmıştır.

2. Derece Az Sönümlü Sistemler Performans Metrikleri



t_r: Yükselme Zamanı

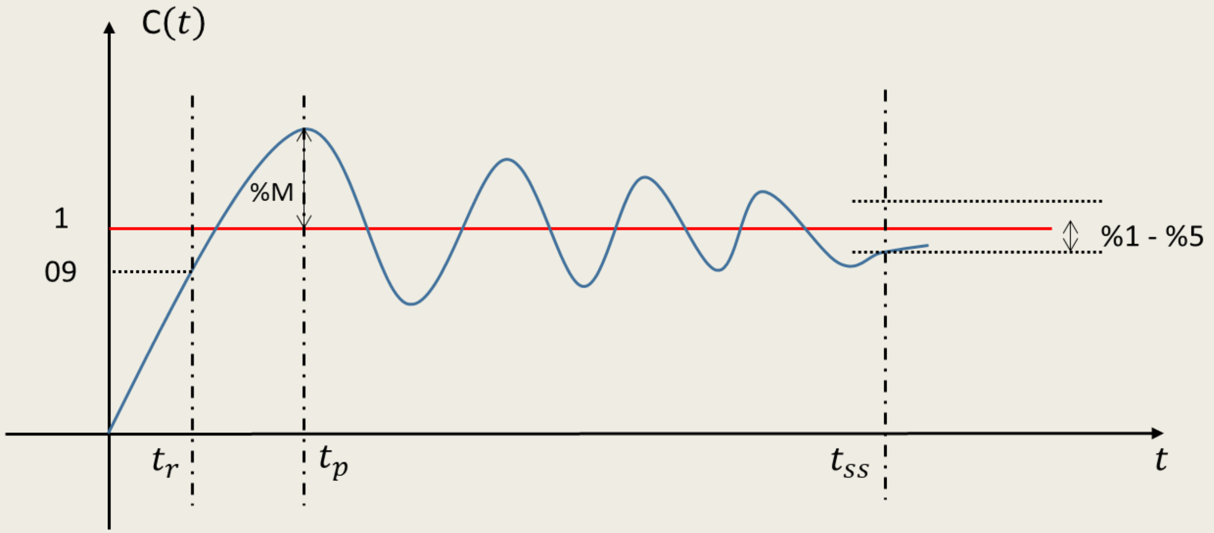
t_p: Zirve Zamanı

%M: Yüzde aşım

t_{ss}: Yerleşme Zamanı

Dr. Hakan Terzioğlu Ders notlarından alınmıştır.

2. Derece Az Sönümlü Sistemler Performans Metrikleri



%M: Yüzde aşım

Sistem cevabının tepe veya maksimum noktası ile kararlı haldeki değeri arasındaki farkın kararlı haldeki değere oranıdır. % olarak ifade edilir.

t_p: Zirve Zamanı

Sistem cevabının tepe veya maksimum noktaya ulaştığında geçen süre.

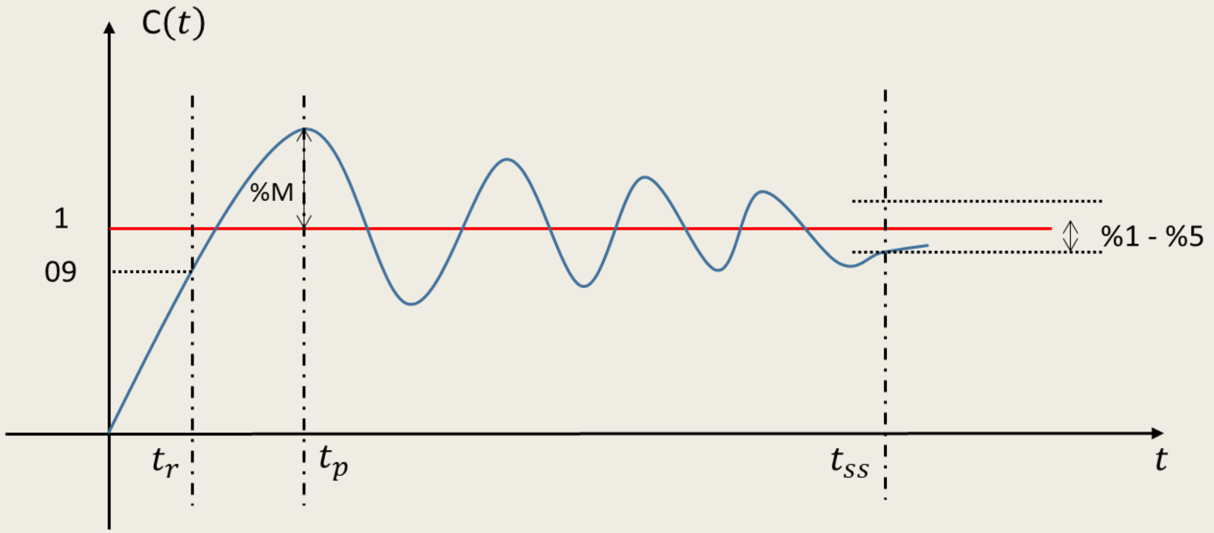
t_r: Yükselme Zamanı

Sistem cevabının %90'nına ulaşıncaya kadar geçen süre olarak tanımlanır.

t_{ss}: Yerleşme Zamanı

Sistem cevabının %98'ine ulaşıncaya kadar geçen süre olarak tanımlanır.

2. Derece Az Sönümlü Sistemler Performans Metrikleri



$\boldsymbol{t_r}$: Yükselme Zamanı

$$t_r = \frac{\pi - cos^{-1}\xi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi - \theta}{\omega_d}$$

$\boldsymbol{t_p}$: Zirve Zamanı

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi}{\omega_d}$$

$\boldsymbol{t_{ss}}$: Yerleşme Zamanı

$$t_s = 5T = \frac{5}{\xi \cdot \omega_n}$$

%M: Yüzde aşım

$$M_p = e^{\left(\frac{-\xi\cdot\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)}$$

Aşağıda transfer fonksiyonu verilen sistemin gecikme, yükselme, maksimum aşma ve yerleşme süreleri ile maksimum aşma değerini hesaplayınız.

$$TF = \frac{4}{s^2 + 3s + 4}$$

$$TF = \frac{4}{s^2 + 3s + 4} = \frac{{w_n}^2}{s^2 + 2 \cdot \xi \cdot w_n \cdot s + {w_n}^2}$$

$${w_n}^2 = 4 \Longrightarrow w_n = 2\, rad/sn$$

$$2 \cdot \xi \cdot w_n = 3 \Longrightarrow \xi = 0{,}75$$

Yükselme zamanı;

$$\theta = cos^{-1}0,75 = 0,723\ rad$$ (Hesap makinesi radyan modunda!)

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 2\sqrt{1-0,75^2} = 1,323\ rad/sn$$

$$t_r = \frac{\pi-\theta}{\omega_d} = \frac{\pi-0,723}{1,323} = 1,828\ sn$$

Maksimum aşmaya ulaşma zamanı;

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{1,323} = 2,375\ sn$$

Yerleşme zamanı;

$$t_s = 4T = \frac{4}{\xi \cdot \omega_n} = \frac{4}{0{,}75 \cdot 2} = 2{,}667\ sn$$

Maksimum aşma;

$$M_p = e^{\left(\frac{-\xi \cdot \pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)} = e^{\left(\frac{-0{,}75 \cdot \pi}{\sqrt{1-0{,}75^2}}\right)} = 0{,}028$$

Buna göre maksimum aşma % 2,8'dir.

Dr. Hakan Terzioğlu Ders notlarından alınmıştır.

Aşağıda transfer fonksiyonu verilen sistemin birim basamak cevabına ait eğriyi MATLAB ile çiziniz. Bu eğri üzerinde maksimum aşma değerini ve tepe zamanını bulunuz. Maksimum yüzde aşma ve tepe zamanı değerini manuel olarak hesaplayıp iki yöntemin uyuştuğunu gösteriniz.

$$\boldsymbol{G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 4}}$$

Dr. Hakan Terzioğlu Ders notlarından alınmıştır.

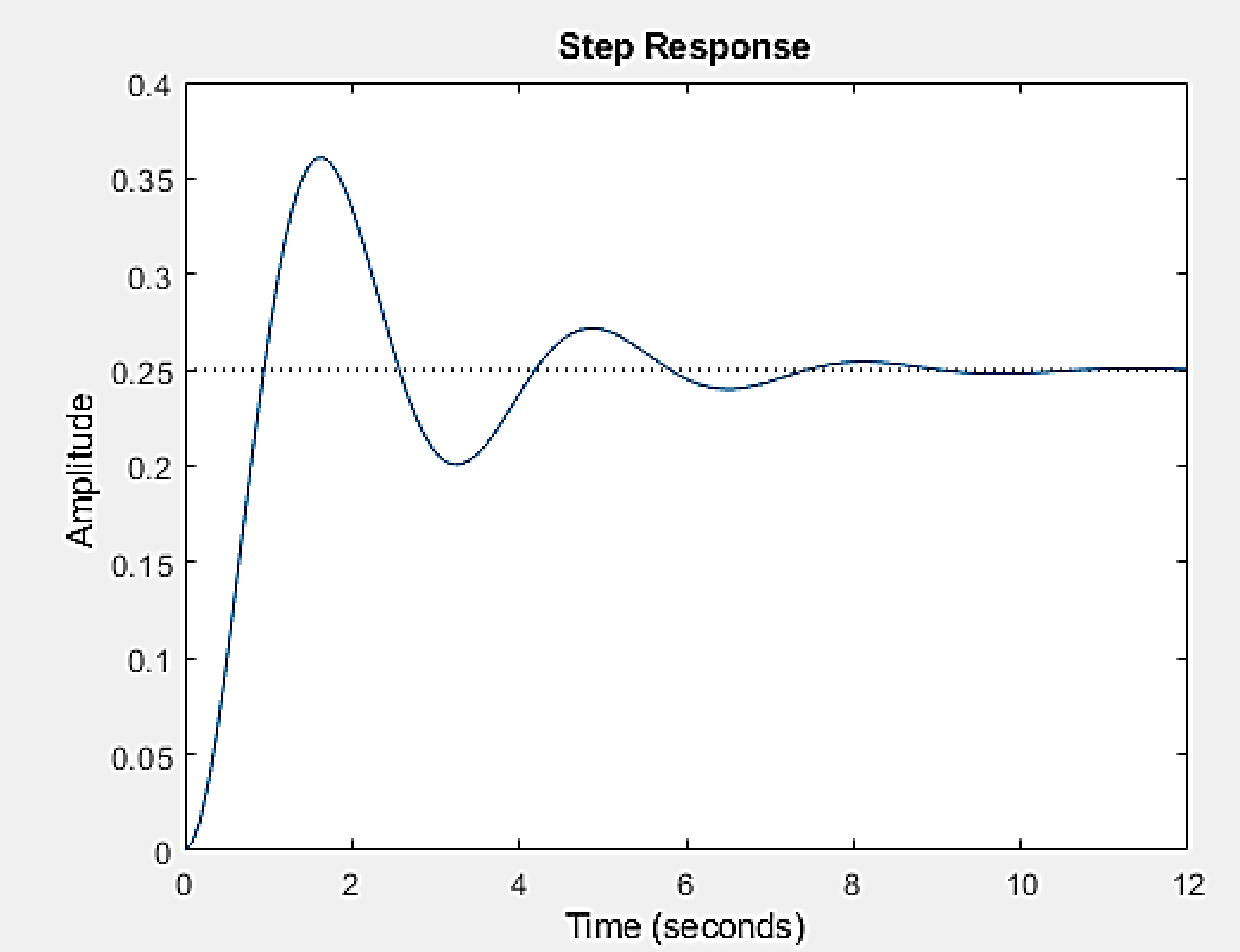
MATLAB YARDIMI

Önce, transfer fonksiyonunun birim basamak yanıtını ve yanıt grafiğini bulalım:

```
>> g=tf(1,[1,1,4]);
>> step(g)
>> g

g =

      1
  -----------
  s^2 + s + 4

Continuous-time transfer function.
```

YANIT GRAFİĞİ

Sönümlü tip kararlı biri sistem.



MATLAB YARDIMI

Transfer fonksiyonunun **kutup**, **sönüm oranı**, **doğal frekans** ve **zaman sabiti** değerlerini bulalım:

```
>> damp(g)

         Pole                  Damping      Frequency      Time Constant
                                          (rad/seconds)     (seconds)

 -5.00e-01 + 1.94e+00i        2.50e-01      2.00e+00          2.00e+00
 -5.00e-01 - 1.94e+00i        2.50e-01      2.00e+00          2.00e+00
```

ζ ω_n

MATLAB YARDIMI

Doğal frekans (w_n) ve **sönüm oranlarını** (ζ) aşağıdaki şekilde de bulabiliriz.

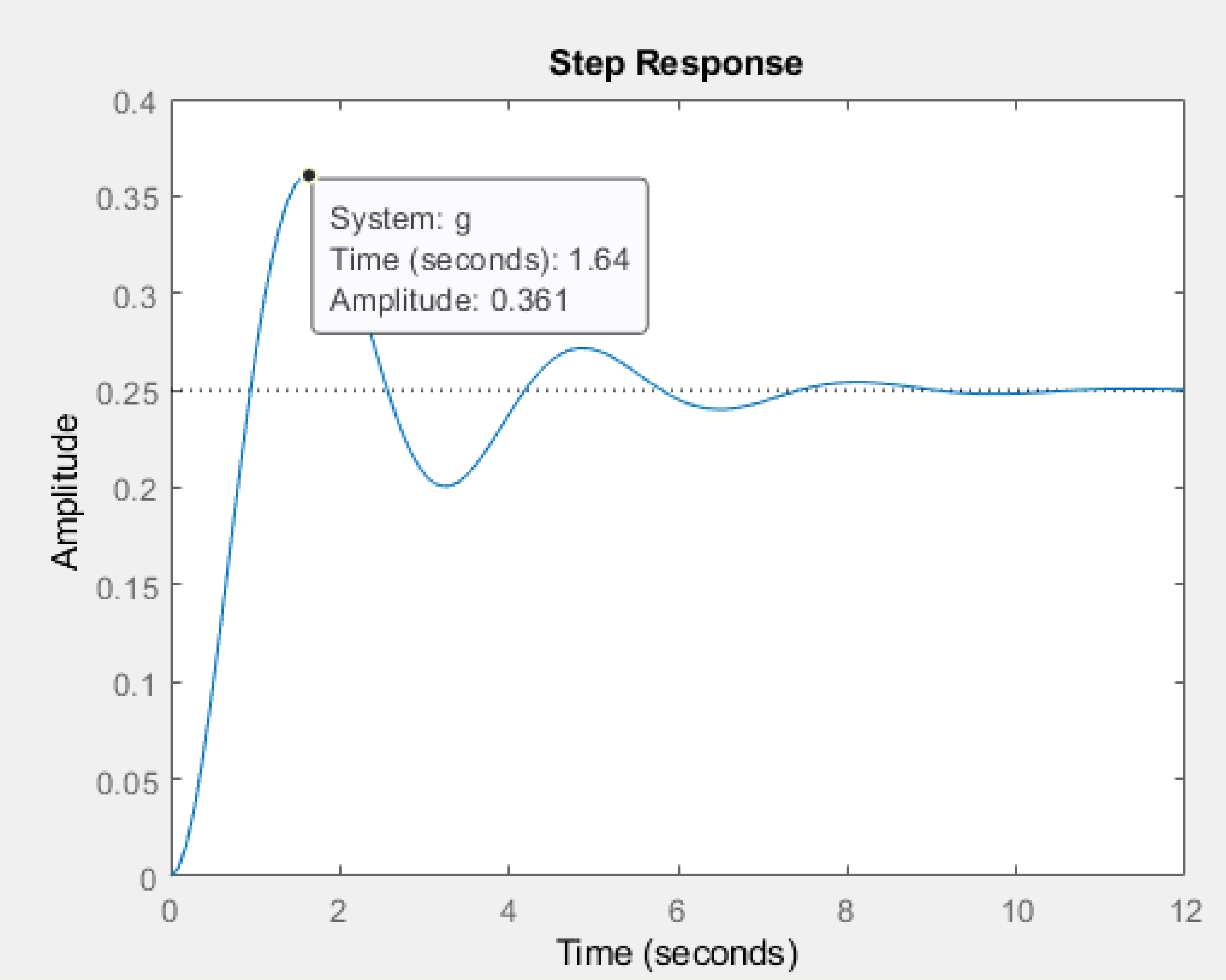
```
>> [wn zeta]=damp(g)

wn =

   2.0000
   2.0000


Zeta =

   0.2500
   0.2500
```

```
>> g=tf(1,[1,1,4]);
>> step(g)
>> g

g =

      1
  -----------
  s^2 + s + 4

Continuous-time transfer function.
```

MATLAB YARDIMI

Tepe zamanı veya zirve zamanı (t_p) değerini önce grafikten tespit edip sonra işlem yaparak bulalım. Eşit çıkması gerekli …

Ayrıca maksimum yüzde aşmayı da bulacağız.



Tepe zamanıdeğerini manuel olarak hesaplayalım:

$$\zeta = 0.25$$
$$\omega_n = 2$$

Bunları Matlab yardımı ile bulmuştuk

$$w_d = w_n\sqrt{1-\zeta^2} = 2 * \sqrt{1-0.25^2} = 1.94rad/s$$

$$\sigma = \zeta w_n = 2 * 0.25 = 0.5$$

$$s_{1,2} = -0.5 \pm j1.94$$

Tepe zamanı:

$$t_p = \frac{\pi}{w_d} = \frac{3.14}{1.94} = 1.619sn$$

Grafik ile uyumlu

Maksimum yüzde aşma:

$$M_p = e^{-(\frac{0.25\pi}{\sqrt{1-0.25^2}})} = 0.444 = \%44.4$$

Grafik ile uyumlu

MATLAB YARDIMI

$$s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -\sigma \pm j\omega_d$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

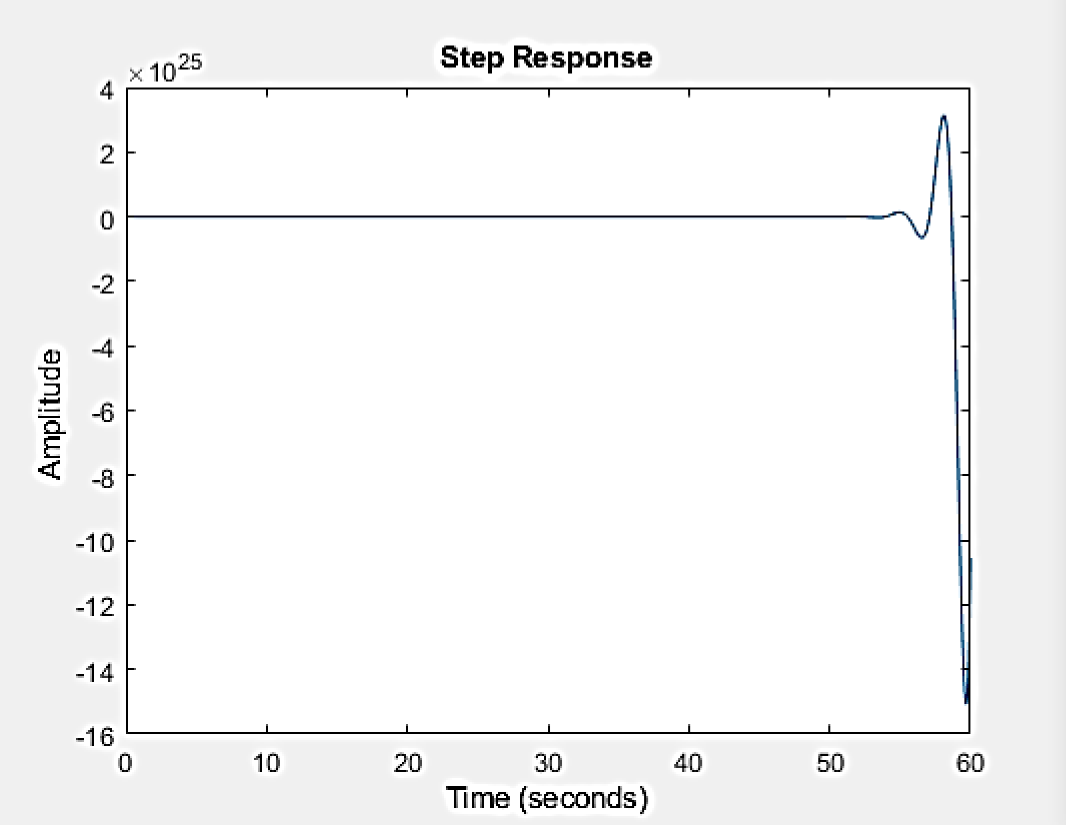
```
>> wd=wn.*sqrt(1-xsi.^2)

wd =

    1.9365
    1.9365

>> tp=pi./wd

tp =

    1.6223
    1.6223
```

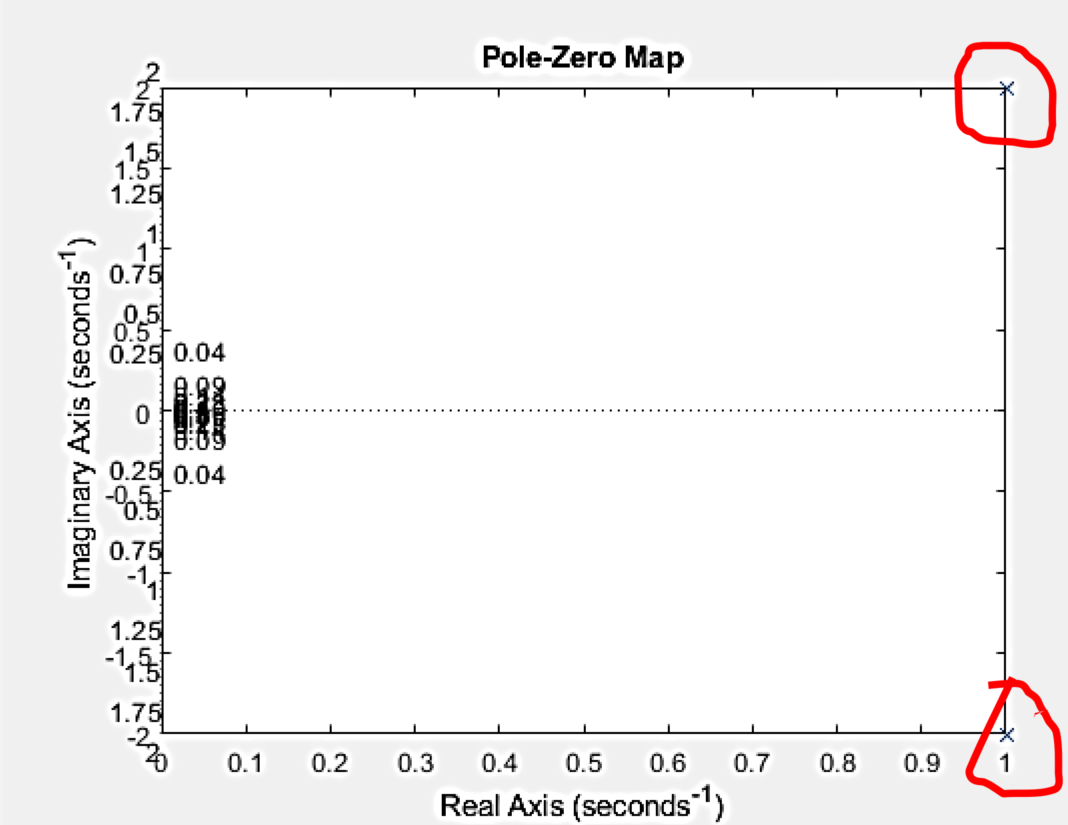
Aşağıda transfer fonksiyonu verilen sistemin birim basamak cevabına ait eğriyi MAT LAB ile çiziniz. Sönüm oranını ve doğal frekansı hesaplatınız.

$$\boldsymbol{GH(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 5}}$$

```
clear;close all
y=tf(9,[1 -2 5]);
step(y)
figure
pzmap(y), grid
```

Kararlı Değil





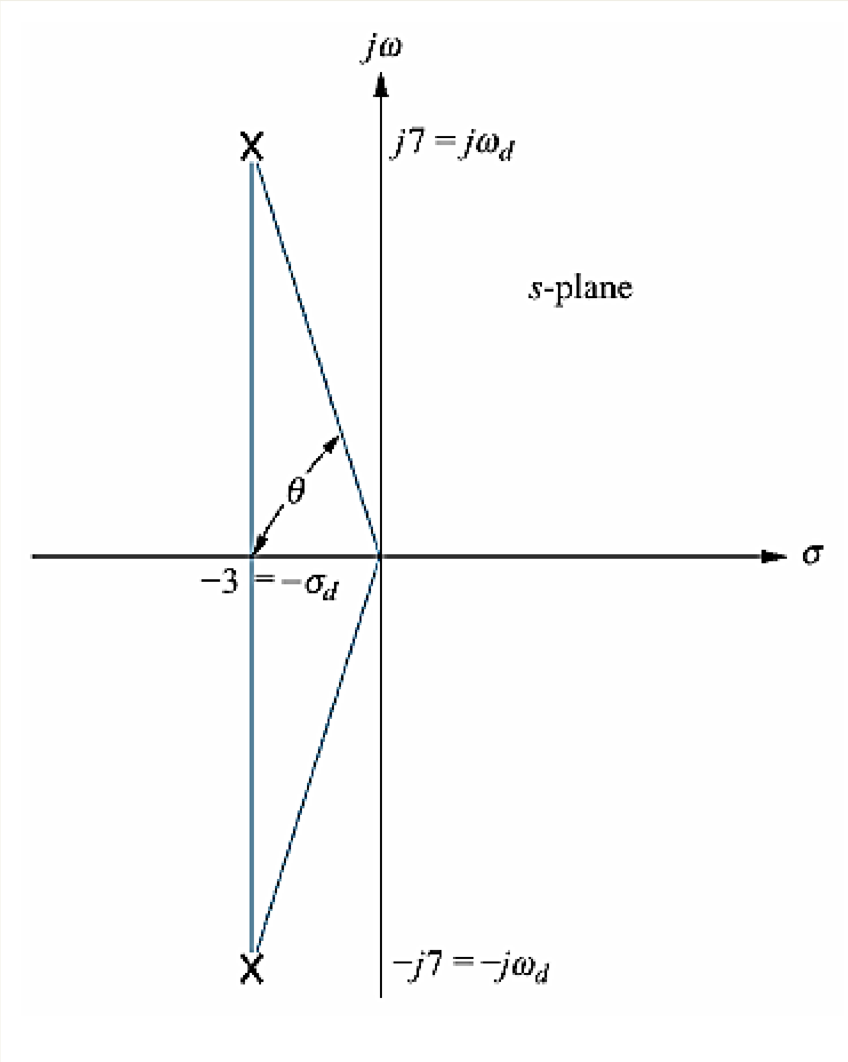
>> damp(y)

Pole	Damping	Frequency (rad/seconds)	Time Constant (seconds)
1.00e+00 + 2.00e+00i	-4.47e-01	2.24e+00	-1.00e+00
1.00e+00 - 2.00e+00i	-4.47e-01	2.24e+00	-1.00e+00

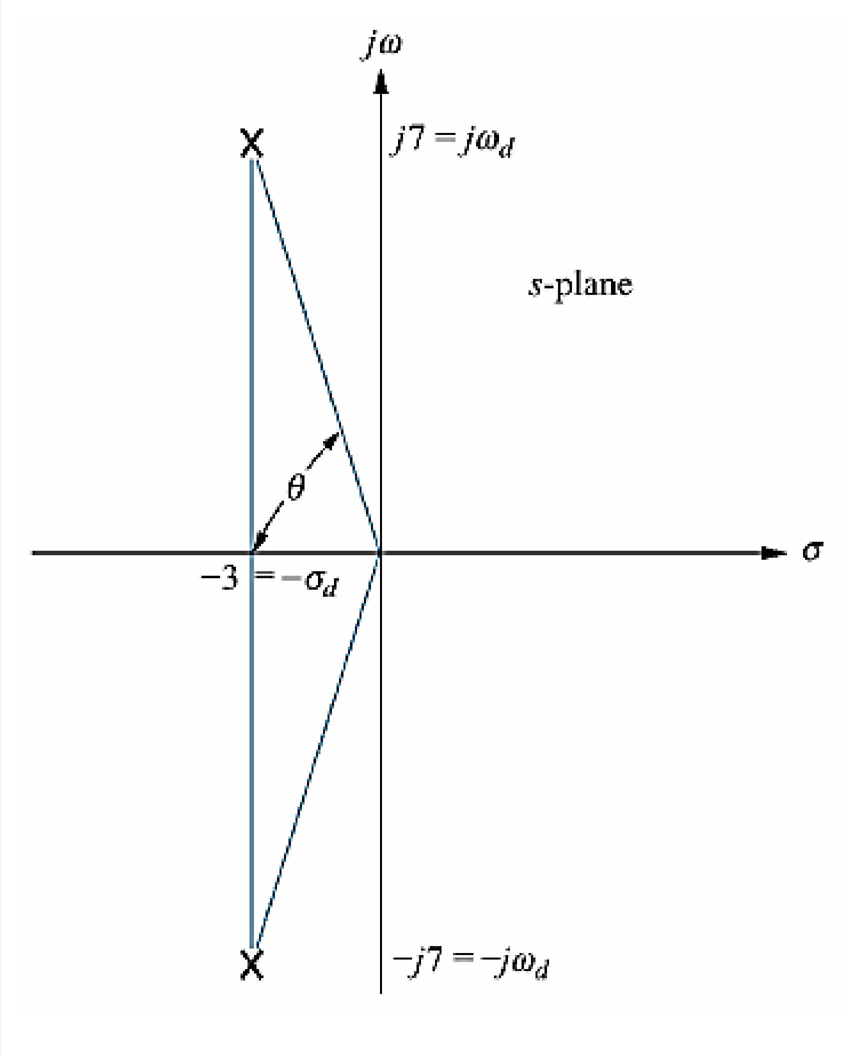
Kararlı Değil

Published with MATLAB® 2018

Örnek: Kutup şekli verilen Sistem için, ζ, ω_n, T_p, %OS ve T_s'yi bulunuz



Örnek: Kutup şekli verilen Sistem için, ζ, ω_n, T_p, %OS ve T_s'yi bulunuz



Burada

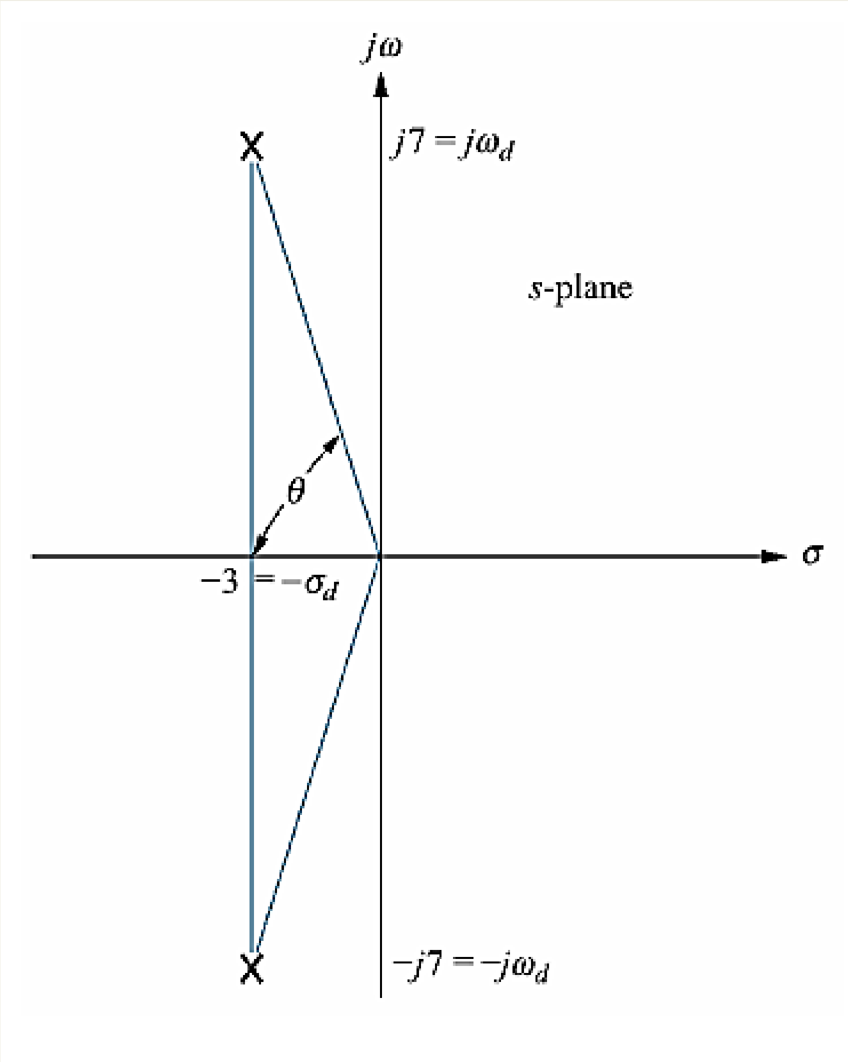
$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad \text{ve} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\sqrt{1-\zeta^2}/\zeta\right) = \cos^{-1}\zeta$$

$$s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -\sigma \pm j\omega_d$$

$$\zeta = Cos(\theta)$$
$$= Cos(\arctan(7/3)) = 0.394$$

$$\omega_n = \sqrt{7^2+3^2} = 7.616\, rad/s$$

Örnek: Kutup şekli verilen Sistem için, ζ, ω_n, T_p, %OS ve T_s'yi bulunuz



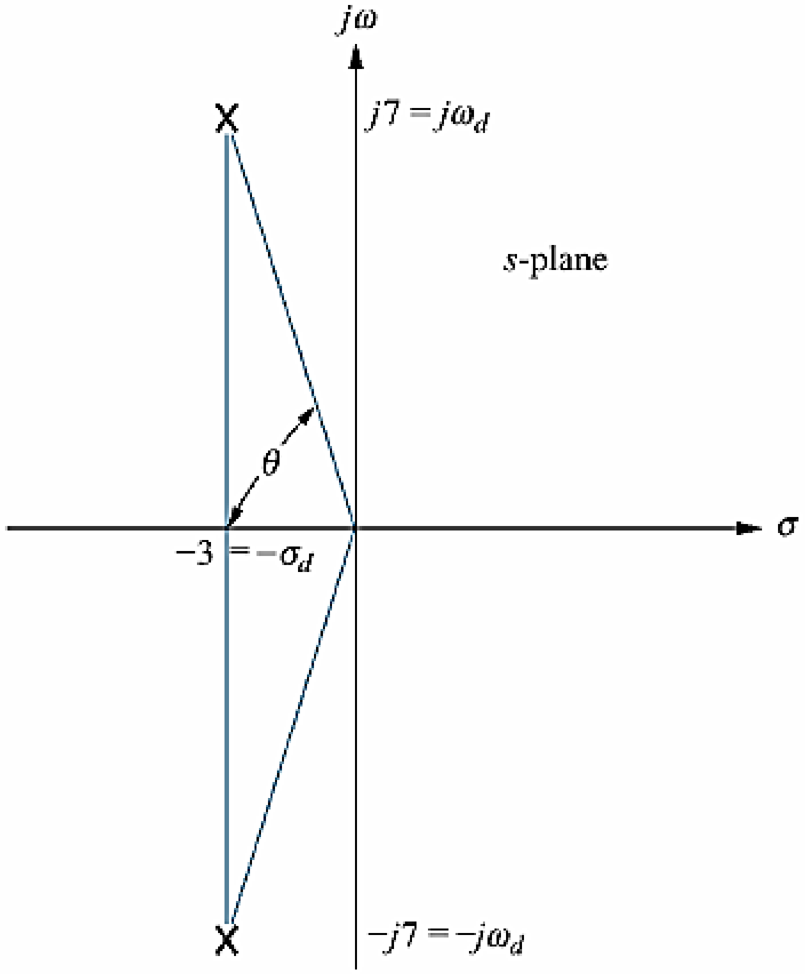
$$G(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2}$$

$$G(s) = \frac{57.91}{s^2 + 6s + 57.91} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{7}{3} = 1{,}166\,rad$$

$$w_d = 7.616\sqrt{1 - 0.394^2} = 6.999 \cong 7$$

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d} = \frac{3.14 - 1.166}{7} = 0.28\,sn$$

Örnek: Kutup şekli verilen Sistem için, ζ, ω_n, T_p, %OS ve T_s'yi bulunuz



$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{7} = 0.449s$$

$$\%OS = e^{-(\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}})} \times 100$$

$$= e^{-(\frac{0.394\pi}{\sqrt{1-0.394^2}})} \times 100 = \%26.01$$

$$T_s = \frac{4}{\sigma_d} = \frac{4}{3} = 1.33s$$

İkinci Dereceden Sistemlerin Geçici ve Kalıcı Durum Cevabı

Sönüm oranı ζ'ya bağlı olarak karakteristik denklemin kutupları 4 farklı kategoride incelenebilir.

1. Eğer $\boldsymbol{\zeta = 0}$ ise, s_1 ve s_2 tamamen kompleks eşleniktir ($s_{1,2} = \mp j\omega_n$) ve geçici zaman cevabı sona ermez.
2. Eğer $\boldsymbol{0 < \zeta < 1}$, Kapalı çevrim kutupları s_1 ve s_2 negatif gerçek kısmı olan komplex eşlenik kutuplardır ($s_{1,2} = -\sigma \mp j\omega_d$). Bu tarz sistemlere az sönümlü (***under damped)*** sistemler adı verilir.
3. Eğer $\boldsymbol{\zeta = 1}$, bu durumda sistem kritik sönümlüdür. Kapalı çevrim sistemin negatif ve gerçek katlı kutupları ($s_{1,2} = -\omega_n$).
4. $\boldsymbol{\zeta > 1}$ durumunda fazla sönümlü sistem cevabı elde edilir. Sistemin kutupları negatif, farklı iki gerçek sayıdır ($s_{1,2} = -\sigma \mp \omega_d$).

İkinci Dereceden Sistemlerin Impulse Girişine Cevabı

HATIRLATMA

Karakteristik denklem= $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$

Buradan sistemin kutupları aşağıdaki gibi bulunur:

$$s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -\sigma \pm j\omega_d$$

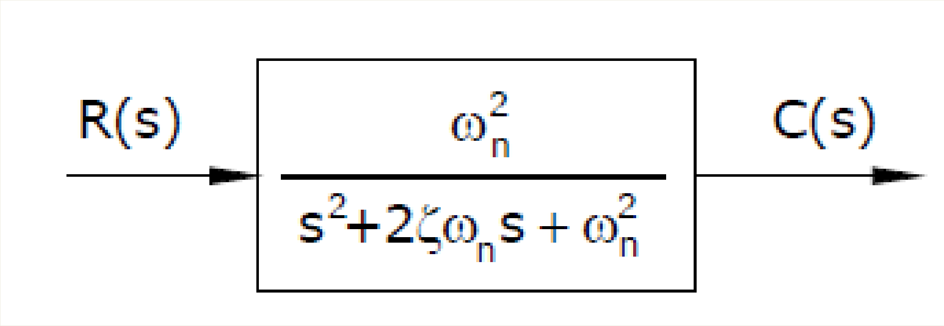
$\boldsymbol{\xi = 0}$ ***ise iki kök de sanal eksende***

$\boldsymbol{\xi = 1}$ ***ise gerçek eksende iki eşit kök yani katlı kök***

$\boldsymbol{\xi > 1}$ ***ise iki kök de gerçek eksende ancak eşit değil***

$\boldsymbol{0 < \xi < 1}$ ***ise iki kök de sanal ve eşlenik***

İkinci Dereceden Sistemlerin Impulse Girişine Cevabı



$R(s) = 1$ (Birim Impulse Laplace dönüşümü)

$$C(s) = R(s) * G(s) = \ [1] * \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$$

İkinci Dereceden Sistemlerin Impulse Girişine Cevabı

$$C(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$$

$$\boldsymbol{\xi = 0 \; ise}$$

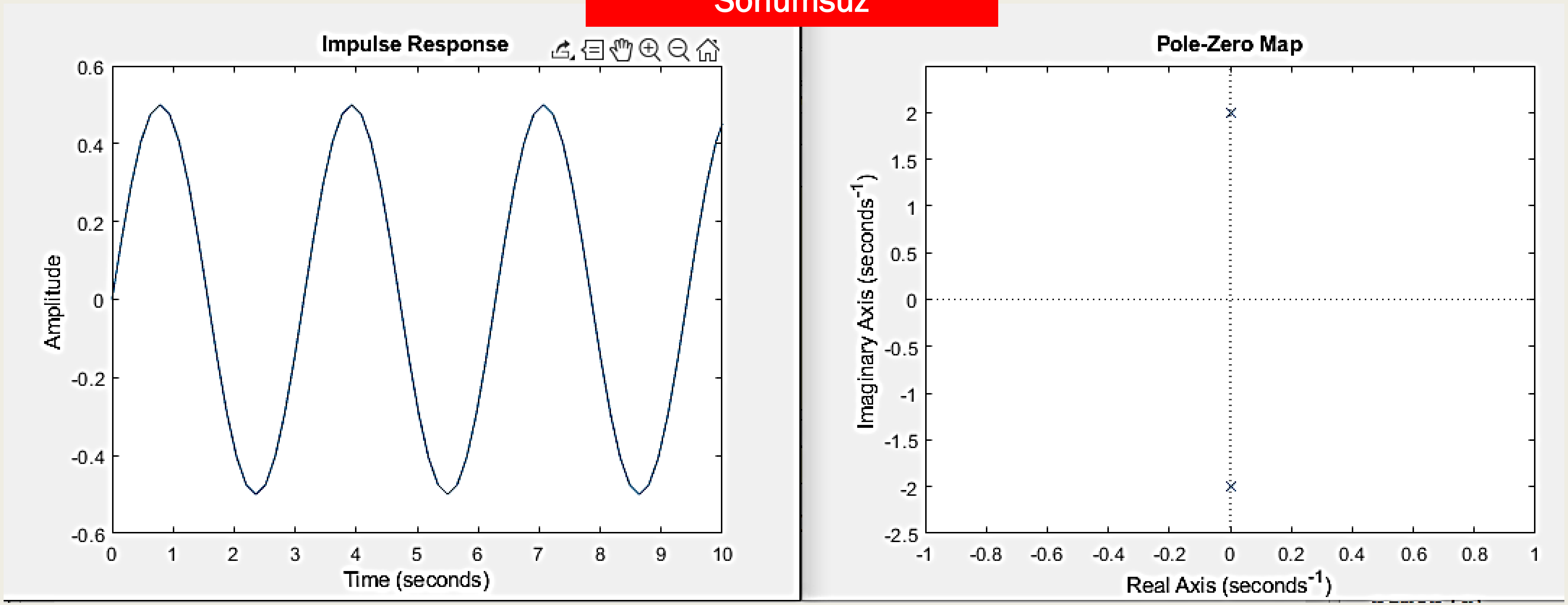
$$C(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + w_n^2}$$

$$c(t) = w_n \sin w_n \, t$$

İkinci Dereceden Sistemlerin Impulse Girişine Cevabı

$$C(s) = \frac{4}{s^2 + 4}$$

Sönümsüz



İkinci Dereceden Sistemlerin Impulse Girişine Cevabı

$$C(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$$

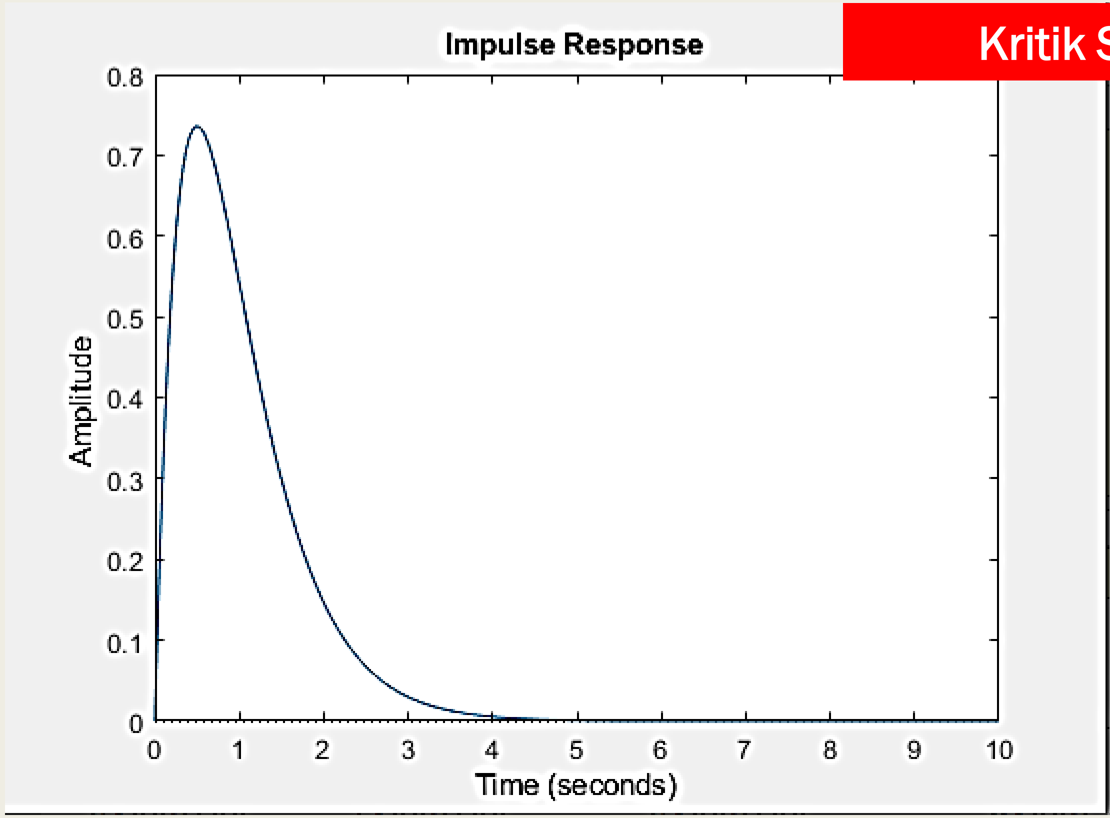
$$\boldsymbol{\xi = 1\ ise}$$

$$C(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2w_n s + w_n^2}$$

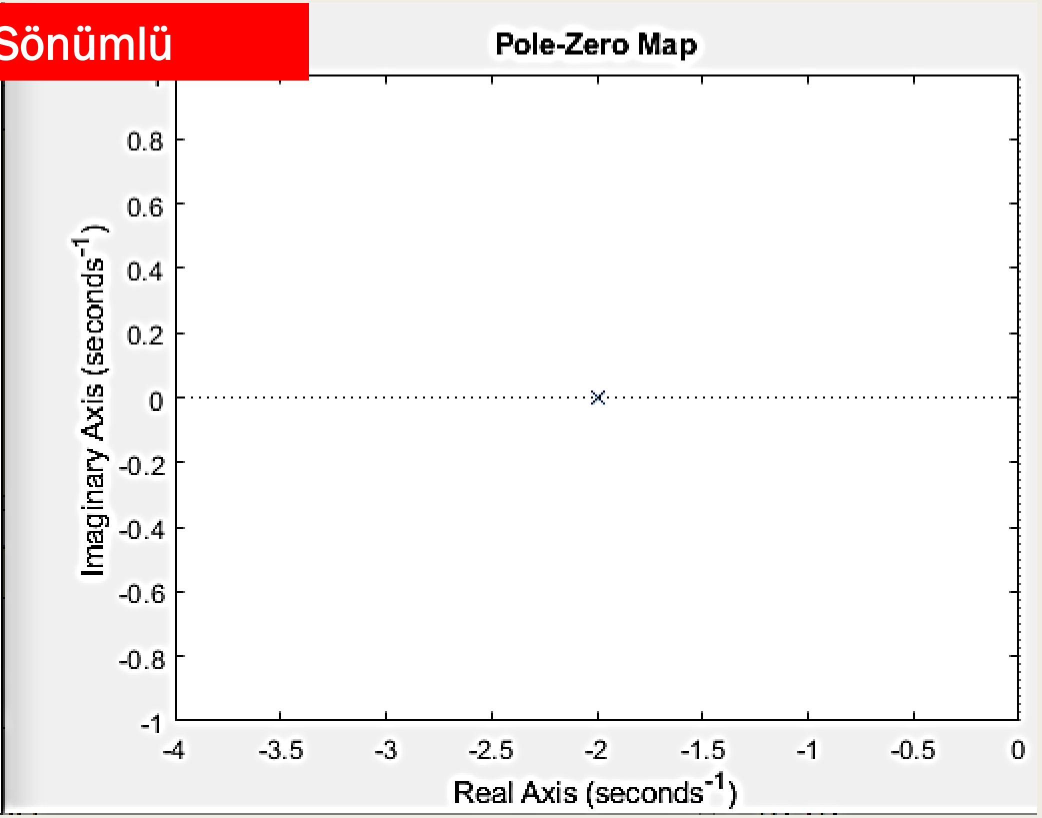
$$c(t) = w_n^2 t e^{-w_n t}$$

İkinci Dereceden Sistemlerin Impulse Girişine Cevabı

$$C(s) = \frac{4}{s^2 + 4s + 4} \qquad \xi = \mathbf{1}\ \boldsymbol{ise}$$



Kritik Sönümlü



Published with MATLAB® 2018

İkinci Dereceden Sistemlerin Impulse Girişine Cevabı

$$C(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$$

$$\boldsymbol{\xi > 1 \; ise}$$

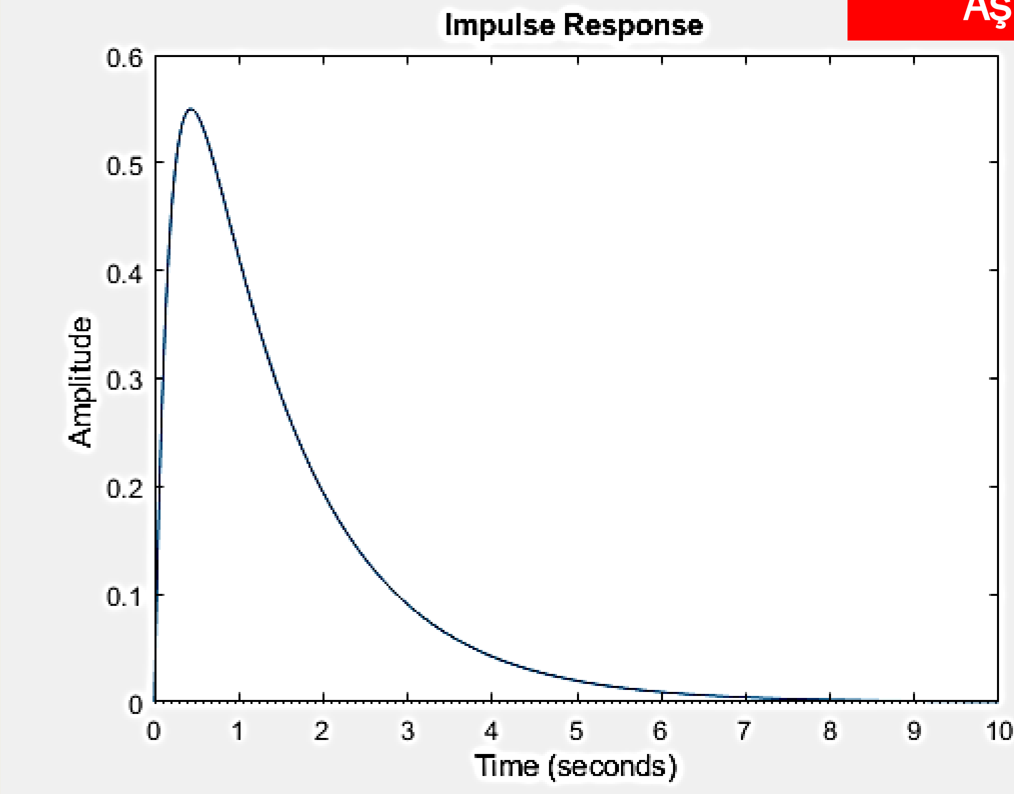
$$C(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$$

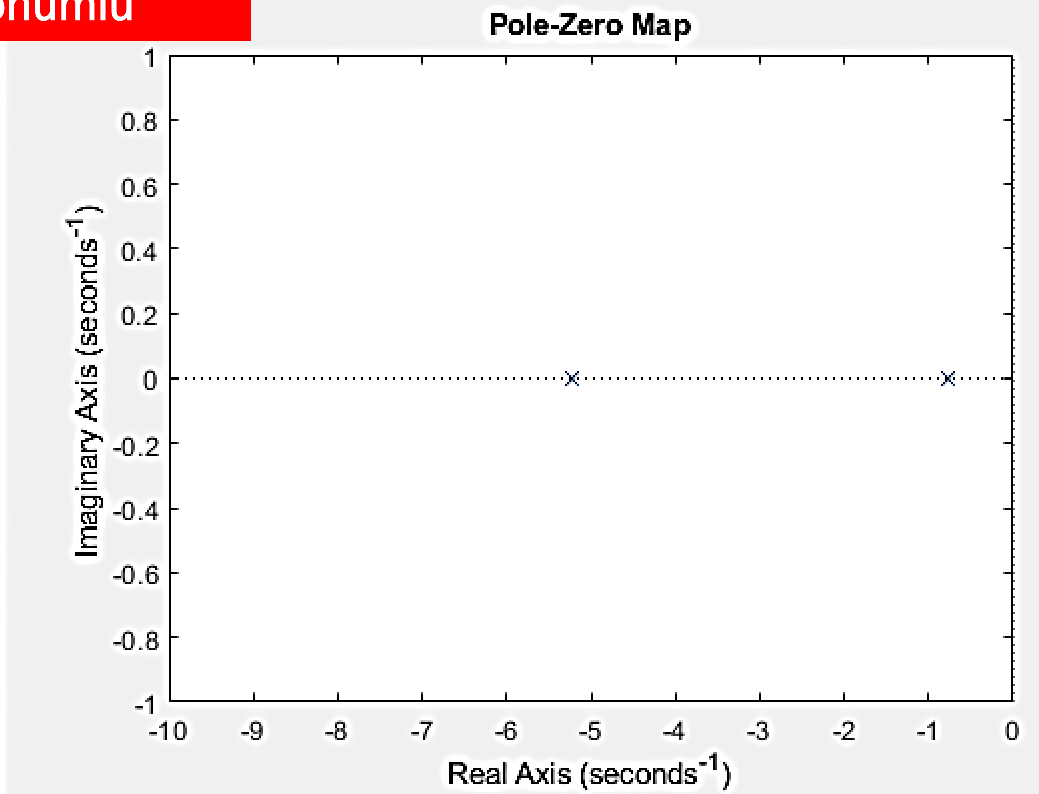
$$c(t) = \left(\frac{w_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}\right)[e^{-(\zeta w_n + \; w_n\sqrt{\zeta^2 - 1)}t} + e^{-\left(\zeta w_n - \; w_n\sqrt{\zeta^2 - 1}\right)t}]$$

İkinci Dereceden Sistemlerin Impulse Girişine Cevabı

$$C(s) = \frac{4}{s^2 + 6s + 4} \quad \boldsymbol{\xi = 1.5\ seçelim}$$

Aşırı Sönümlü





İkinci Dereceden Sistemlerin Impulse Girişine Cevabı

$$C(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n + w_n^2}$$

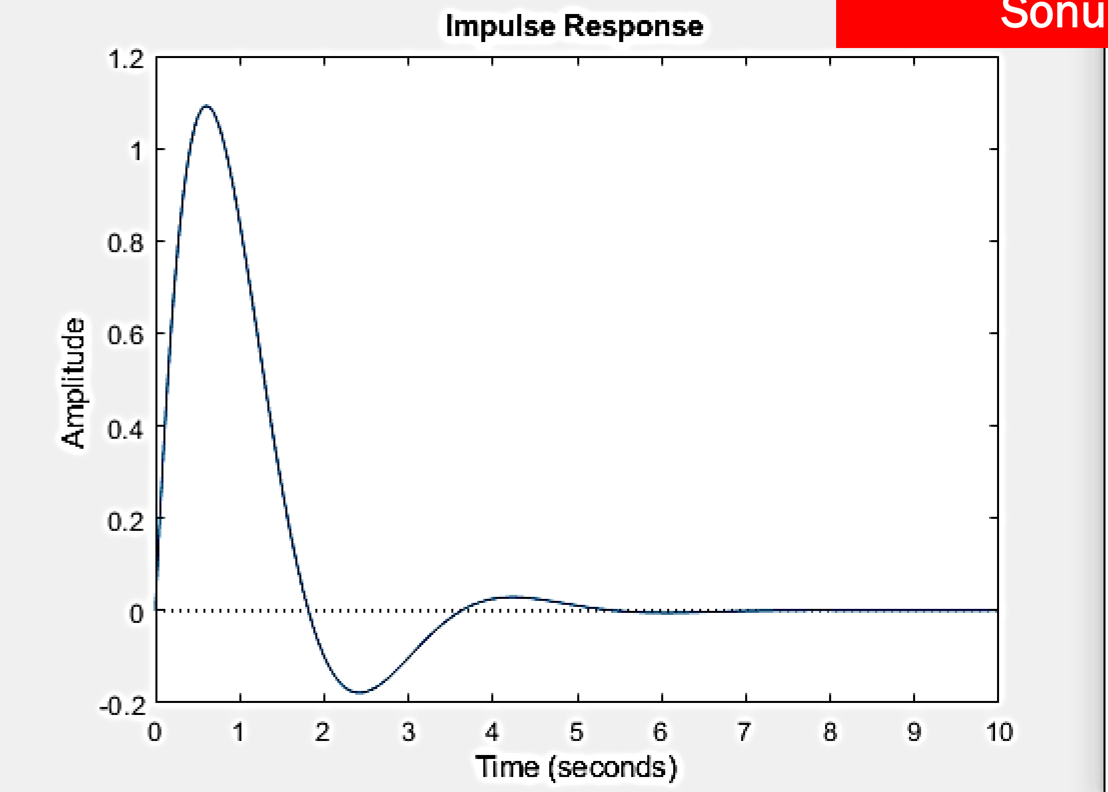
$$\mathbf{0 < \xi < 1} \ \boldsymbol{ise}$$

$$C(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n + w_n^2}$$

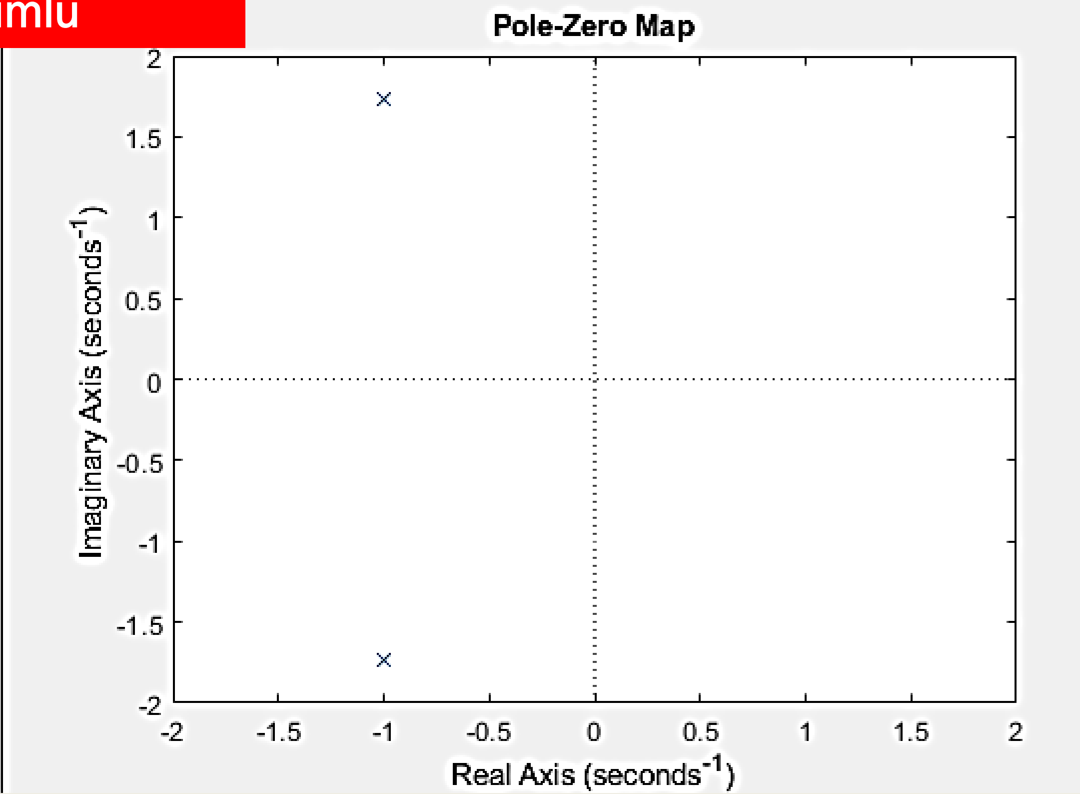
$$c(t) = \left(\frac{w_n e^{-w_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \sin w_d t$$

İkinci Dereceden Sistemlerin Impulse Girişine Cevabı

$$C(s) = \frac{4}{s^2 + 2s + 4} \quad \boldsymbol{\xi = 0.5\ seçelim}$$



Sönümlü



İkinci Dereceden Sistemlerin Impulse Girişine Cevabı

Kritik sönümlü ve Aşırı sönümlü karşılaştırması

$$C1(s) = \frac{4}{s^2 + 6s + 4} \quad \xi = \mathbf{1.5}$$ **Aşırı Sönümlü**

$$C2(s) = \frac{4}{s^2 + 4s + 4} \quad \xi = \mathbf{1}\ \boldsymbol{ise}$$ **Kritik Sönümlü**

```
close all;clear;clc;
Kritik_Sonumlu=tf(4,[1,4,4]);
impulse(Kritik_Sonumlu)
xlim([0 5.5])
hold on
Asiri_Sonumlu=tf(4,[1,6,4]);
impulse(Asiri_Sonumlu)
xlim([0 5.5])
Sonumlu=tf(4,[1,2,4]);
impulse(Sonumlu)
xlim([0 5.5])
Sonumsuz=tf(4,[1,0,4]);
impulse(Sonumsuz)
xlim([0 5.5])
legend
```