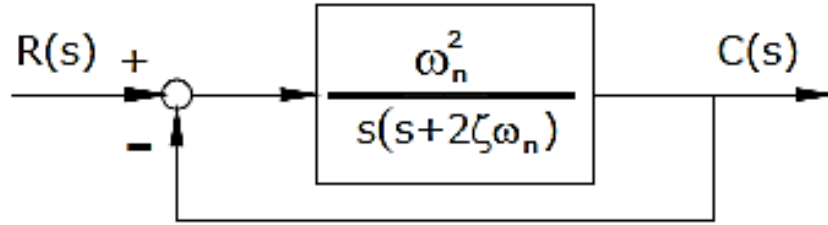


# GEÇİCİ DURUM YANITLARI

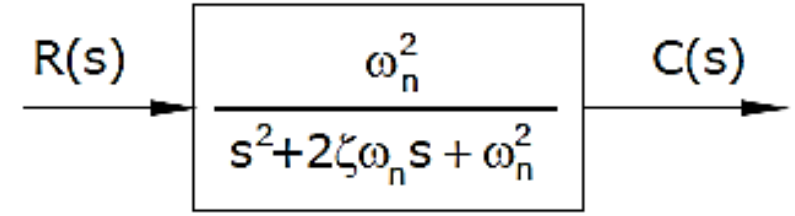
2. DERECE SİSTEMLER

# İkinci derece sistem polinomları

## İkinci Dereceden Sistemlerin Geçici ve Kalıcı Durum Cevabı



İkinci mertebeden bir sistemin kapalı çevrim blok diyagramı



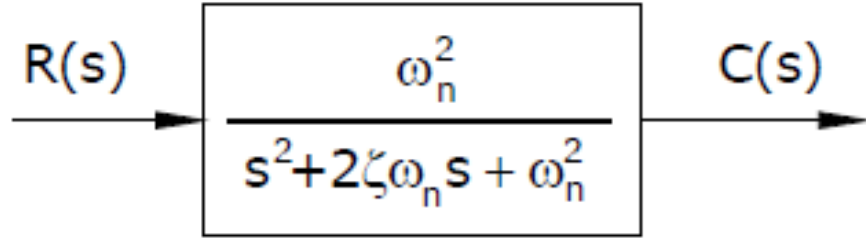
Yandaki sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonu

Yukarıdaki sistem standart ikinci derece sistem olarak adlandırılır. Bazı kaynaklar bu tarz sistemlere Titreşim tipi sistemler adını da vermektedir. Standart ikinciden kapalı çevrim sistemin karakteristik denklemi:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

Buradan sistemin kutupları aşağıdaki gibi bulunur:

$$s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -\sigma \pm j\omega_d$$



2. Derece sistemlerin dinamik davranışları  $\zeta$  ve  $\omega_n$  kullanılarak ifade edilebilir.

**Doğal Frekans,  $\omega_n$ :** İkinci derece bir sistemin doğal frekansı sistemin sönümsüz osilasyon frekansıdır.

**Sönüm oranı,  $\zeta$ :** Üstel düşüm frekansının doğal frekansa oranıdır.

Birinci derece sistemlerde parametrenin değişimi sadece sistemin cevap hızını etkiler ama ikinci derece sistemlerde parametre değişimi cevabın şeklini de değiştirebilir.

# İkinci derece sistem polinomları

## İkinci Dereceden Sistemlerin Geçici ve Kalıcı Durum Cevabı

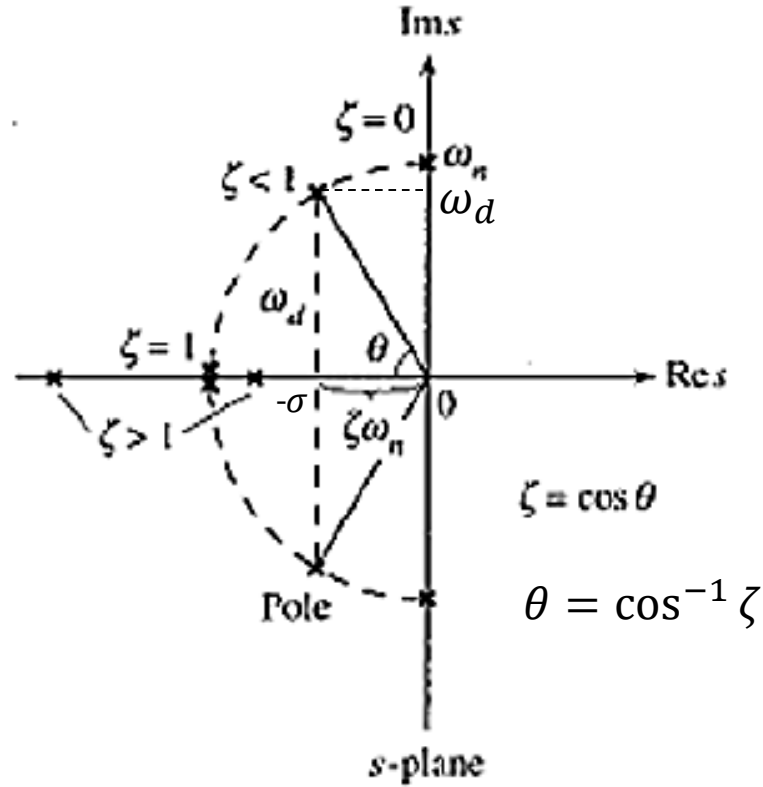
Sönüm oranı  $\zeta$ 'ya bağlı olarak karakteristik denklemin kutupları 4 farklı kategoride incelenebilir.

1. Eğer  $\zeta = 0$  ise,  $s_1$  ve  $s_2$  tamamen kompleks eşleniktir ( $s_{1,2} = \mp j\omega_n$ ) ve **geçici zaman cevabı sona ermez**.
2. Eğer  $0 < \zeta < 1$ , Kapalı çevrim kutupları  $s_1$  ve  $s_2$  negatif gerçekteki kısmı olan kompleks eşlenik kutuplardır ( $s_{1,2} = -\sigma \mp j\omega_d$ ). Bu tarz sistemlere **az sönümlü (*under damped*)** sistemler adı verilir.
3. Eğer  $\zeta = 1$ , bu durumda **sistem kritik sönümlüdür**. Kapalı çevrim sistemin negatif ve gerçekteki katlı kutupları ( $s_{1,2} = -\omega_n$ ).
4.  $\zeta > 1$  durumunda **fazla sönümlü sistem** cevabı elde edilir. Sistemin kutupları negatif, farklı iki gerçekteki sayıdır ( $s_{1,2} = -\sigma \mp \omega_d$ ).

# Sönüm Oranı

## İkinci Dereceden Sistemlerin Geçici ve Kalıcı Durum Cevabı

Aşağıdaki şekil, sönüm oranı  $\zeta$  alternatiflerine bağlı olarak sistem kutupların durumunu s-düzlemi üzerinde göstermektedir.



Sönüm oranı  $\zeta$  ile kapalı çevrim sistem kutupları arasındaki ilişki.

$$\zeta = \cos \theta$$

$$\theta = \cos^{-1} \zeta$$

# İkinci Dereceden Sistemlerin Birim-Basamak Girişine Yanıtları

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad R(s) = \frac{1}{s}$$

$\zeta = 0$  olduğunda;

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2}$$

$$\Rightarrow C(s) = \left( \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2} \right) R(s)$$

$$C(s) = \left( \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2} \right) \left( \frac{1}{s} \right) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + \omega_n^2)}$$

$$c(t) = (1 - \cos(\omega_n t)) u(t)$$

# İkinci Dereceden Sistemlerin Birim-Basamak Girişine Yanıtları

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad R(s) = \frac{1}{s}$$

$\zeta = 1$  olduğunda;

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\Rightarrow C(s) = \left( \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2} \right) R(s)$$

$$C(s) = \left( \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2} \right) \left( \frac{1}{s} \right) = \frac{\omega_n^2}{s(s + \omega_n)^2}$$

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + \omega_n)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \omega_n} + \frac{C}{(s + \omega_n)^2}$$

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \omega_n} - \frac{\omega_n}{(s + \omega_n)^2}$$

$$c(t) = (1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t})u(t)$$

# İkinci Dereceden Sistemlerin Birim-Basamak Girişine Yanıtları

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2} \quad R(s) = \frac{1}{s}$$

$0 < \zeta < 1$  olduğunda;

$$s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2 = (s + \zeta w_n)^2 + w_n^2(1 - \zeta^2)$$

$$C(s) = \frac{w_n^2}{(s + \zeta w_n)^2 + w_n^2(1 - \zeta^2)} * \left(\frac{1}{s}\right)$$

$$C(s) = \frac{w_n^2}{s((s + \zeta w_n)^2 + w_n^2(1 - \zeta^2))}$$

Kısmi kesirlere ayırılım:

$$C(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{(s + \zeta w_n)^2 + w_n^2(1 - \zeta^2)}$$



$$c(t) = \left( 1 - \left( \frac{e^{-\zeta w_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \right) \sin(w_d t + \theta) \right) u(t)$$



# İkinci Dereceden Sistemlerin Birim-Basamak Girişine Yanıtları

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2} \quad R(s) = \frac{1}{s}$$

$\zeta > 1$  olduğunda;

$$s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2 = (s + \zeta w_n)^2 + w_n^2(1 - \zeta^2)$$

$$C(s) = \frac{w_n^2}{(s + \zeta w_n)^2 + w_n^2(1 - \zeta^2)} * \left(\frac{1}{s}\right)$$

$$C(s) = \frac{w_n^2}{s((s + \zeta w_n)^2 + w_n^2(1 - \zeta^2))}$$

# İkinci Dereceden Sistemlerin Birim-Basamak Girişine Yanıtları

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2} \quad R(s) = \frac{1}{s}$$

$\zeta > 1$  olduğunda;

Kısmi kesirlere ayırılım:

$$C(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \zeta w_n + w_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} + \frac{C}{s + \zeta w_n - w_n \sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

A=1 olmak üzere

$$c(t) = 1 + B e^{-(\zeta w_n + w_n \sqrt{\zeta^2 - 1})t} + C e^{-(\zeta w_n - w_n \sqrt{\zeta^2 - 1})t}$$

## Birim Basamak Yanıtları:

- Aşırı Sönümlü (Fazla Sönümlü)  $\zeta > 1$
- Sönümlü (Az Sönümlü)  $0 < \zeta < 1$
- Kritik Sönümlü  $\zeta = 1$
- Osilasyonlu  $\zeta = 0$

**Aşırı Sönümlü:** İki kök reel eksen üzerindeyken oluşan cevabdır.

Aşırı (Fazla) Sönümlü

$$\zeta > 1$$

$$G(s) = \frac{9}{s^2 + 9s + 9}$$

$$\zeta = 1.5$$
$$\omega_n = 3$$

$$R(s) = \frac{1}{s}$$

Birim Basamak

$$G(s) = \frac{9}{s^2 + 9s + 9}$$

$$C(s) = \frac{1}{s} * \frac{9}{s^2 + 9s + 9}$$

ÇIKIŞ

Ters Laplace dönüşümü yapalım:  
Bunun için kısmi kesirlere ayırmalıyız:

# MATLAB YARDIMI

```
syms s
pay=[9]
payda=[1 9 9 0]
[r, p, k]=residue(pay,payda)
```

```
r =
    0.1708
   -1.1708
    1.0000
```

```
p =
   -7.8541
   -1.1459
         0
```

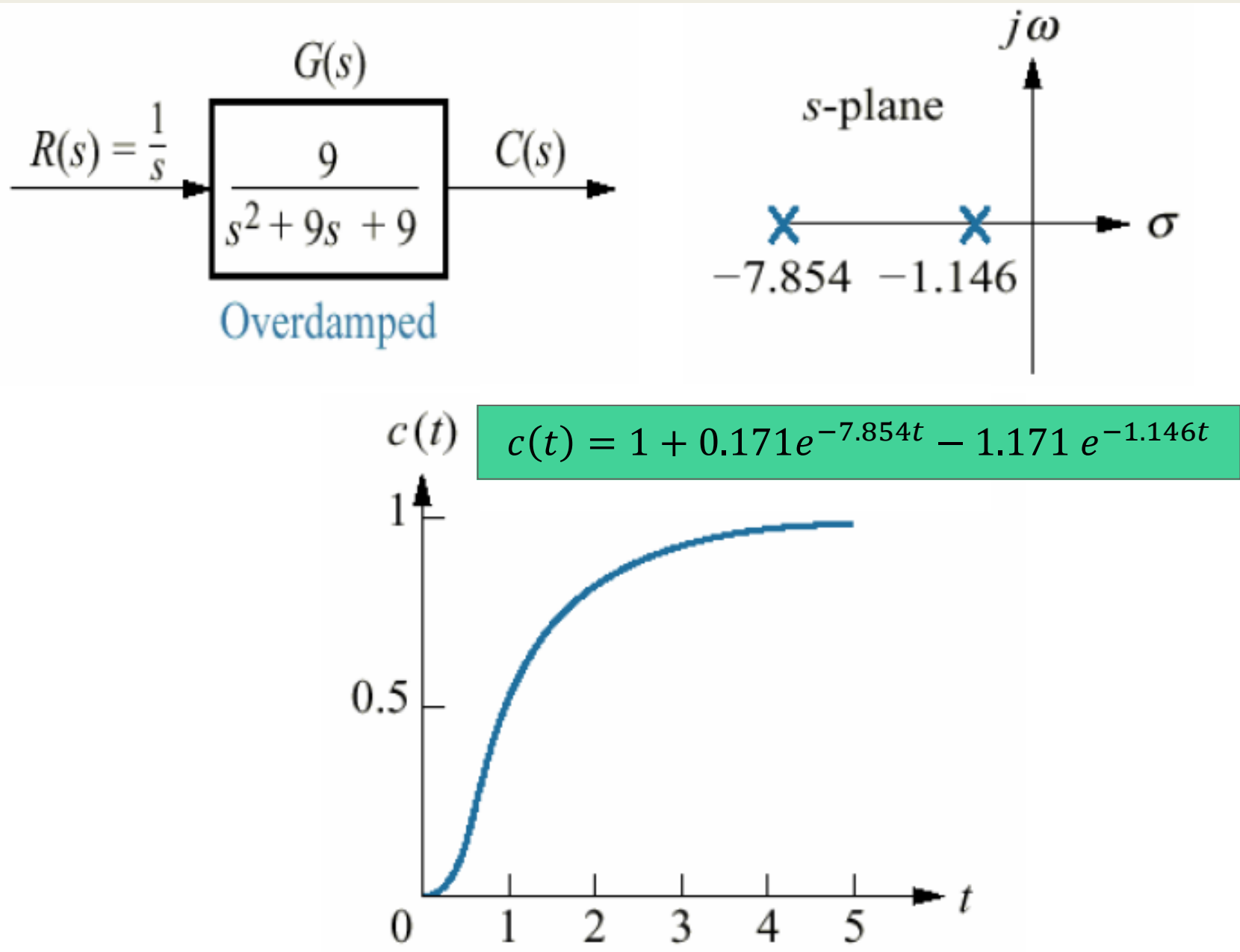
```
k =
[]
```

Kısmi kesirlere ayırma sonrası çıkış ifadesi:

$$C(s) = \frac{0.171}{s + 7.854} - \frac{1.171}{s + 1.146} + \frac{1}{s}$$

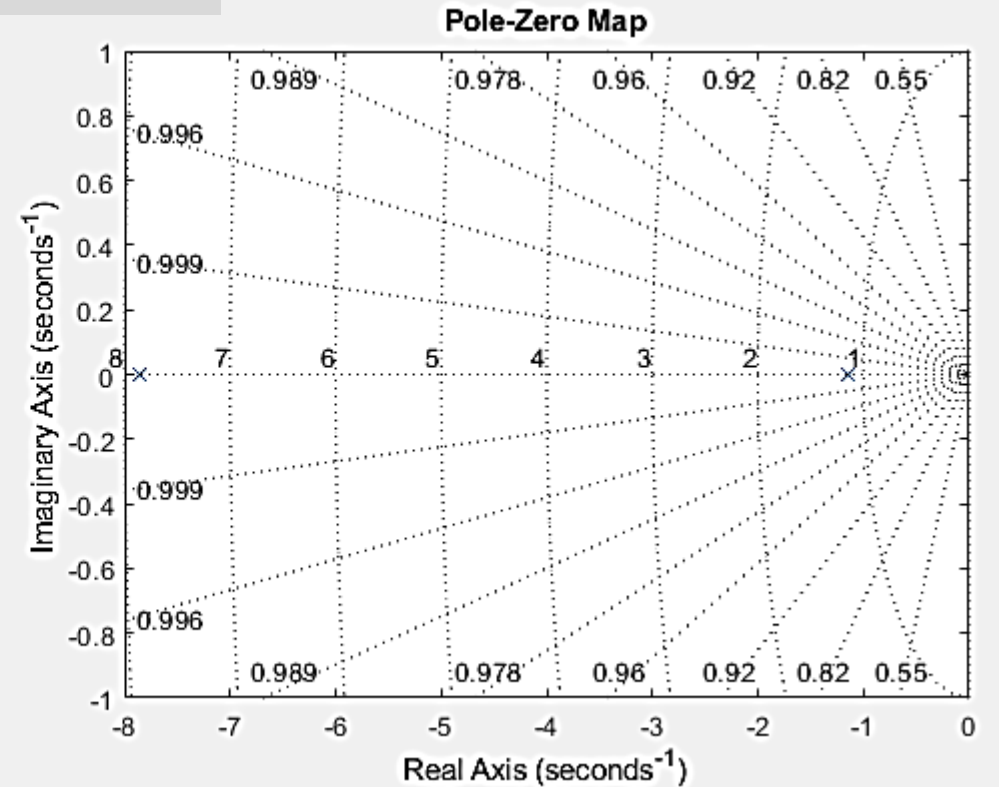
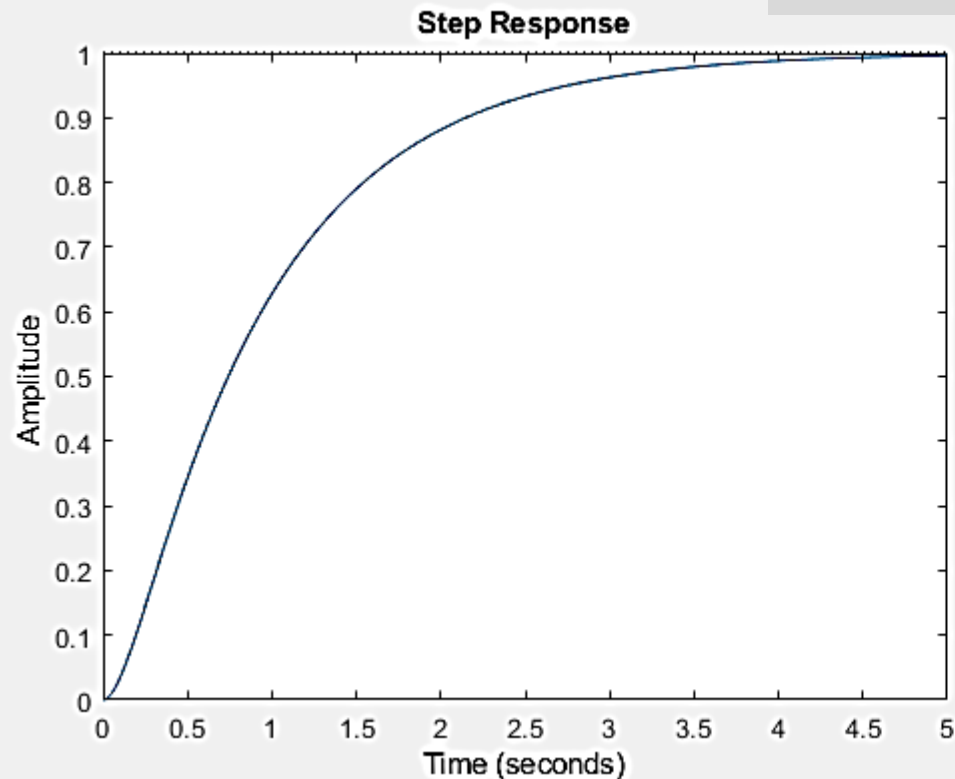
Ters Laplace dönüşümü sonrası çıkış ifadesi:

$$c(t) = 1 + 0.171e^{-7.854t} - 1.171e^{-1.146t}$$



# MATLAB YARDIMI

```
clear;close all
y=tf(9,[1 9 9]);
step(y)
xlim([0 5])
figure
pzmap(y), grid
damp(y)
```



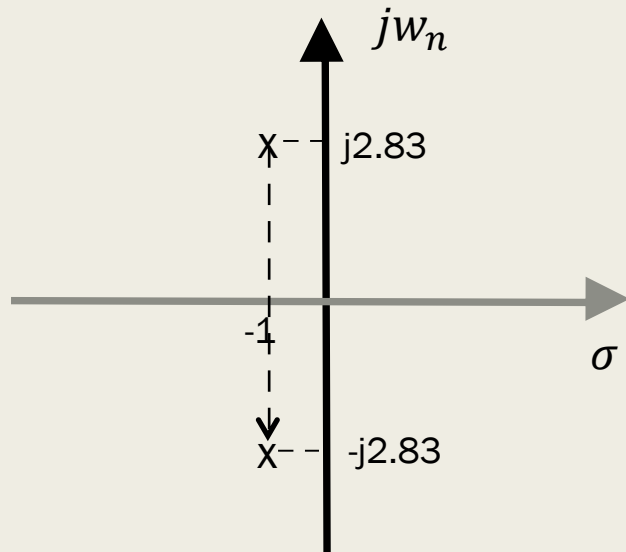
Örnek olarak az sönümlü bir sistem ele alalım:

### AZ SÖNÜMLÜ

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{9}{s^2 + 2s + 9} \longrightarrow \left. \begin{array}{l} \zeta = 0.33 \\ \omega_n = 3 \end{array} \right\} 0 < \zeta < 1$$

Bu sistemin birim basamak yanıtı:

$$C(s) = \frac{9}{s^2 + 2s + 9} * \frac{1}{s} = \frac{9}{s(s^2 + 2s + 9)}$$



$$w_d = w_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 3 * \sqrt{1 - 0.33^2} = 2.83 \text{ rad/s}$$

$$\sigma = \zeta w_n = 3 * 0.333 \cong 1$$

$$\theta = \cos^{-1} \zeta = \cos^{-1} 0.33 = 1.231 \text{ rad}$$

$$s_{1,2} = -1 \pm j2.83$$

$$c(t) = \left( 1 - \left( \frac{e^{-\zeta w_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \right) \sin(w_d t + \theta) \right) = 1 - \frac{e^{-t}}{0.94} \sin(2.83t + 1.23)$$



# MATLAB YARDIMI

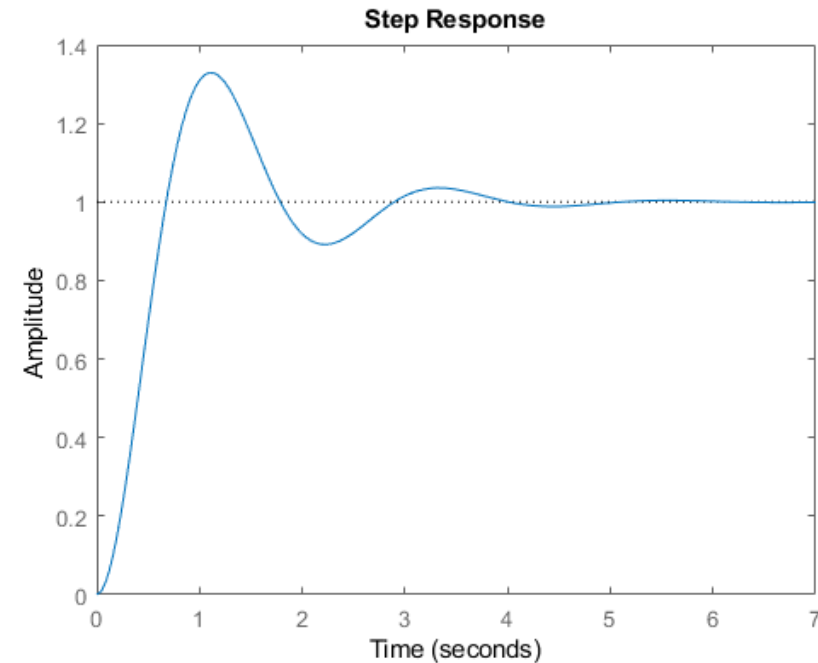
$$c(t) = 1 - \frac{e^{-t}}{0.94} \sin(2.83t + 1.23)$$

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{9}{s^2 + 2s + 9}$$

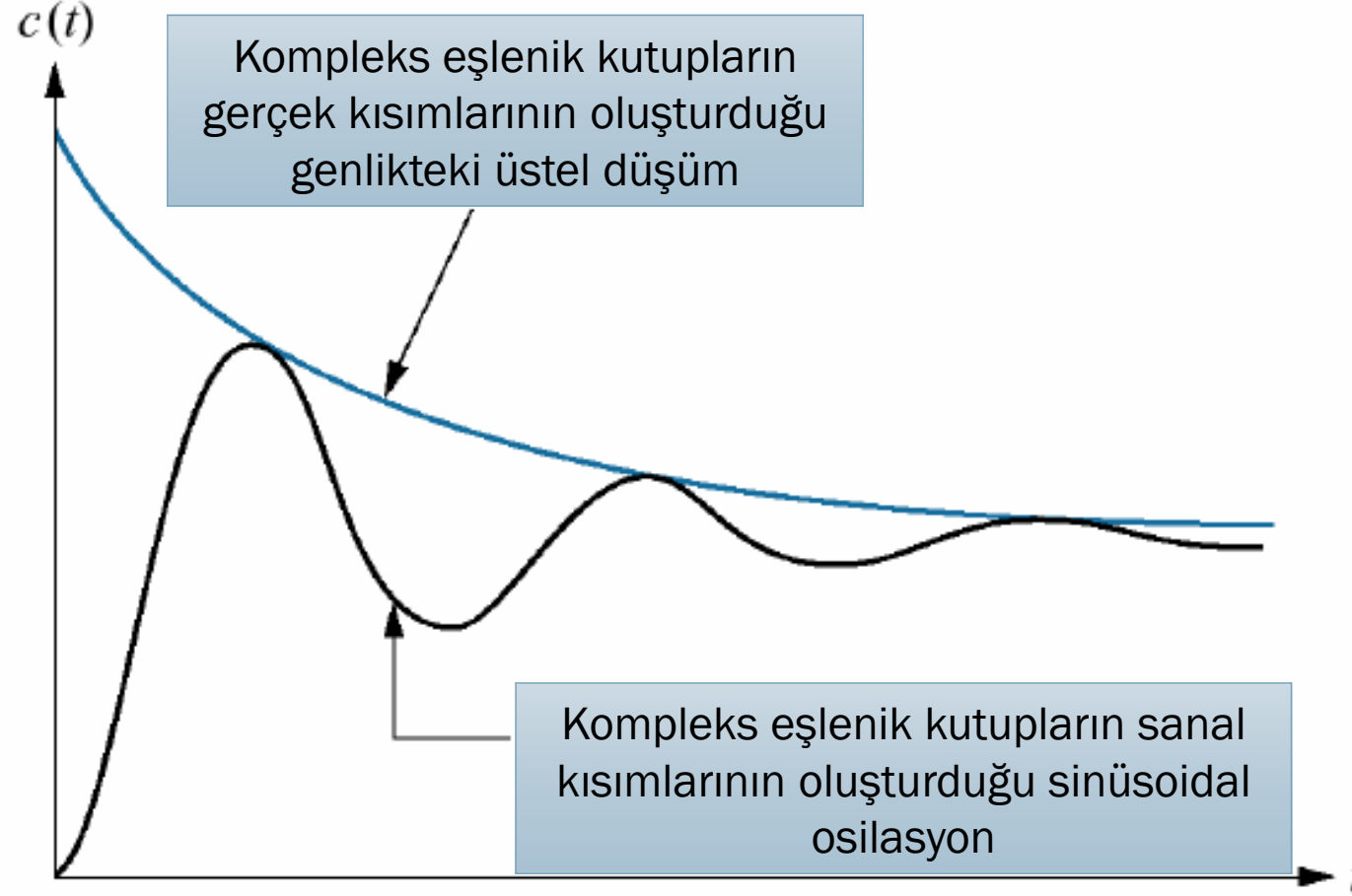
```
% 1. yol
t=0:0.1:6;
y=1-(exp(-t).*sin(2.83*t+1.23)/0.94);
figure
plot(t,y)

%% 2. yol
figure
z=tf(9,[1 2 9]);
step(z);
```

Kutbun reel kısmı sinüsoidalın genliğinin üstel düşüm frekansına karşılık gelirken, imajiner kısmı ise sinüsoidalın osilasyon frekansına karşılık gelir.



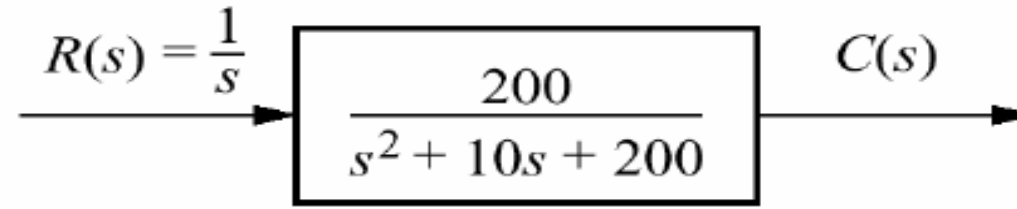
Genel olarak;



Bu tür cevaplara sönümlü cevaplar adı verilir ve kararlı hale sönümlü osilasyon ile ulaşır.

Sinüsoidal'ın frekansına *sönümlü osilasyon frekansı* denir,  $\omega_d$

**Örnek:**



Sisteminin birim basamak cevabını yazınız.  $\zeta = 0,354$

$$\omega_n = 14,14$$

Eşlenik kutuplar:  $s_{1,2} = -5 \pm j13,23$

$$w_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 14,14 * \sqrt{1 - 0,354^2} = 13,23$$

$$\sigma = \zeta \omega_n = 0,354 * 14,14 = 5$$

$$\theta = \cos^{-1} \zeta \rightarrow \cos^{-1} (0,354)$$

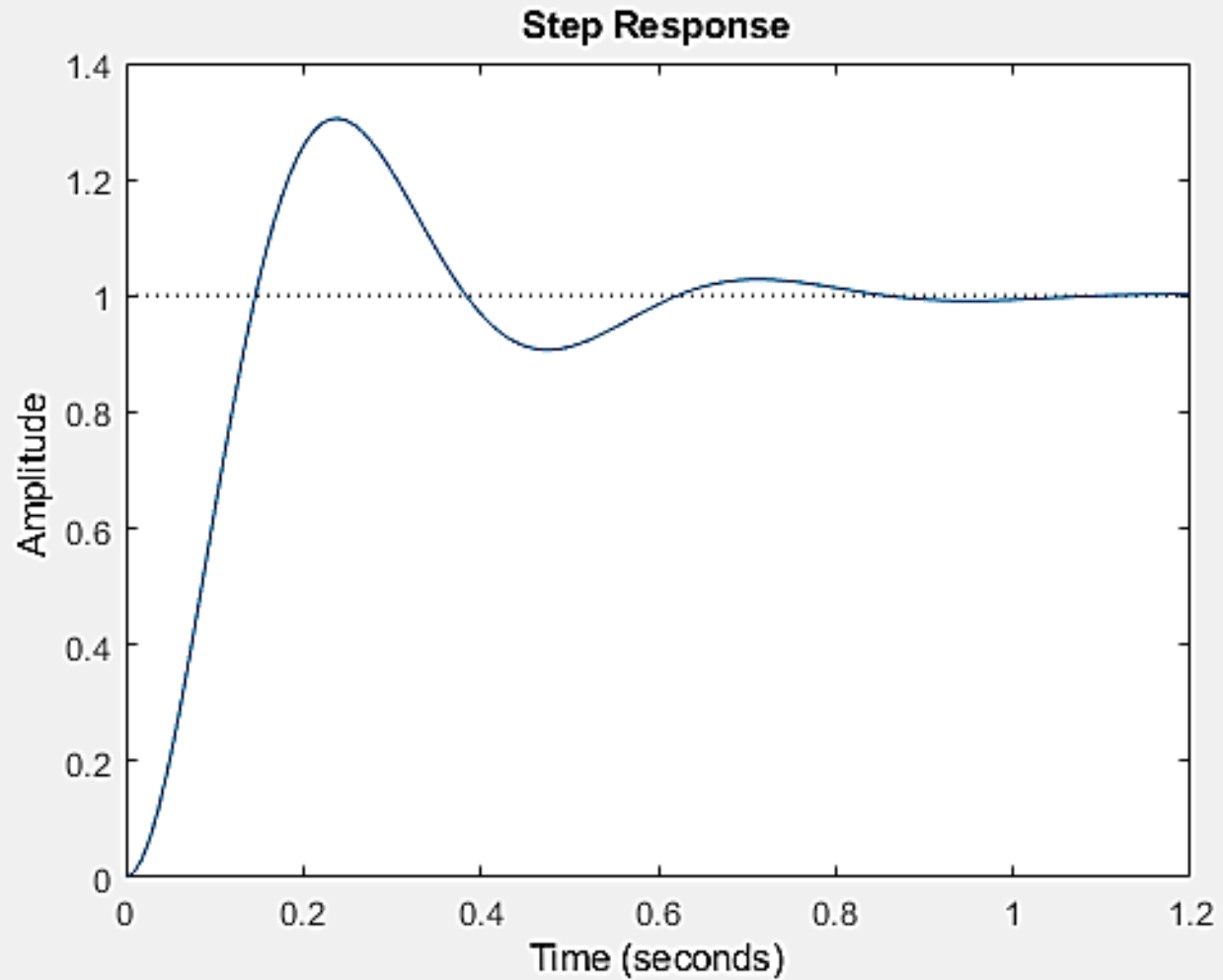
$$\theta = 1,2 \text{ rad/s}$$

$$c(t) = \left( 1 - \left( \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \right) \sin(w_d t + \theta) \right)$$

$$c(t) = 1 - \frac{1}{0,91} * e^{-5t} * \sin(13,23t + 1,2)$$

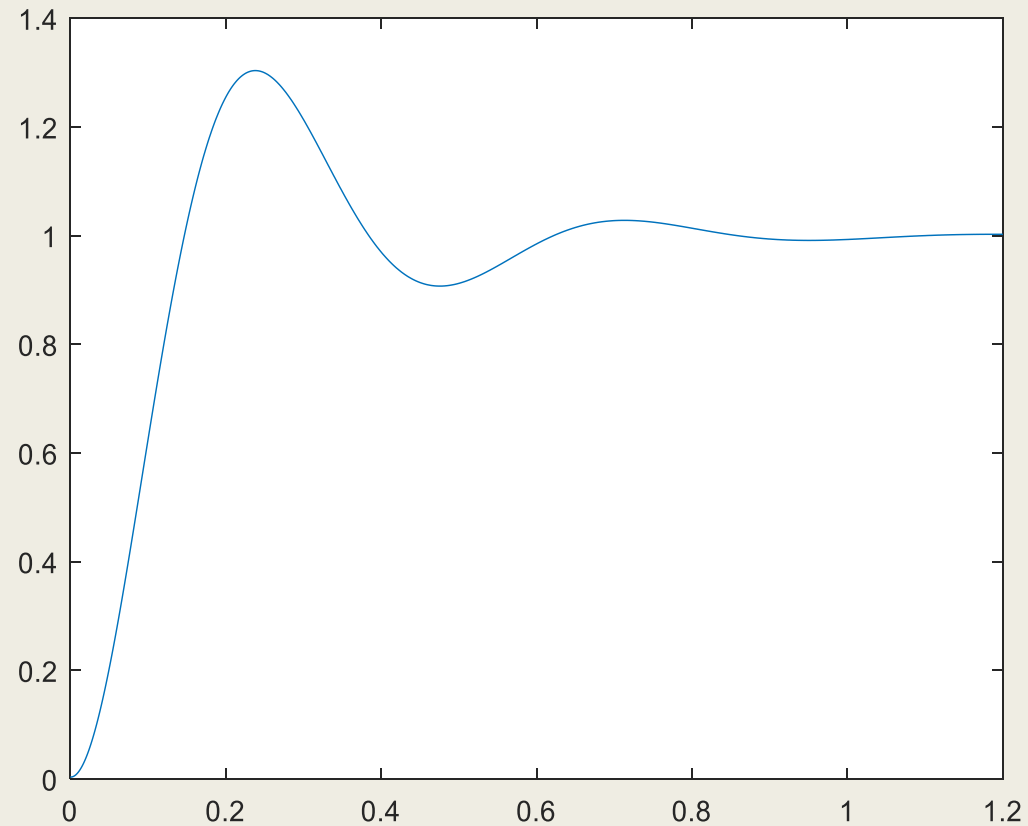
# MATLAB YARDIMI

```
y=tf(200,[1 10 200]);  
step(y)
```



# MATLAB YARDIMI

```
t=0:0.001:1.2;  
y=1-((14.14/13.23)*exp(-5*t).*sin(13.23.*t+1.2));  
figure  
plot(t,y)
```



## Osilasyonlu Cevap:

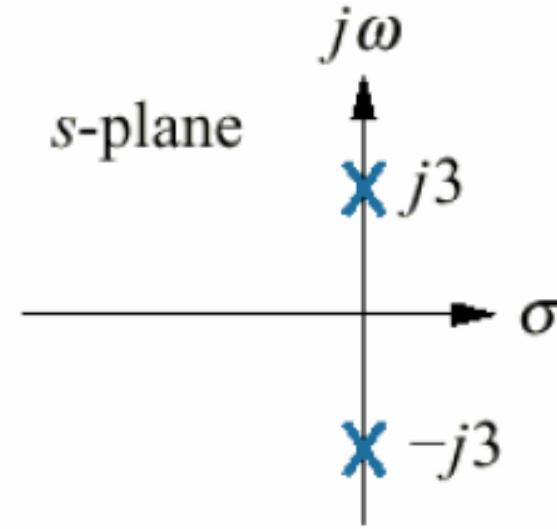
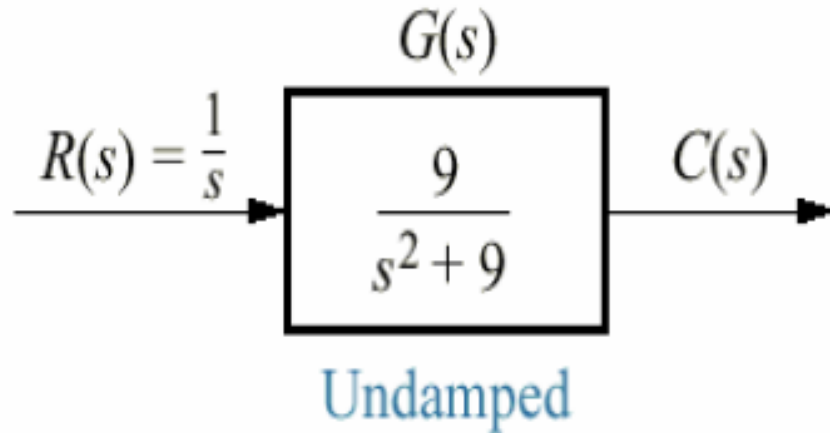
İki kök imajiner eksen üzerindeyken oluşan cevabdır.

Undamped

$$C(s) = \frac{9}{s(s^2 + 9)}$$

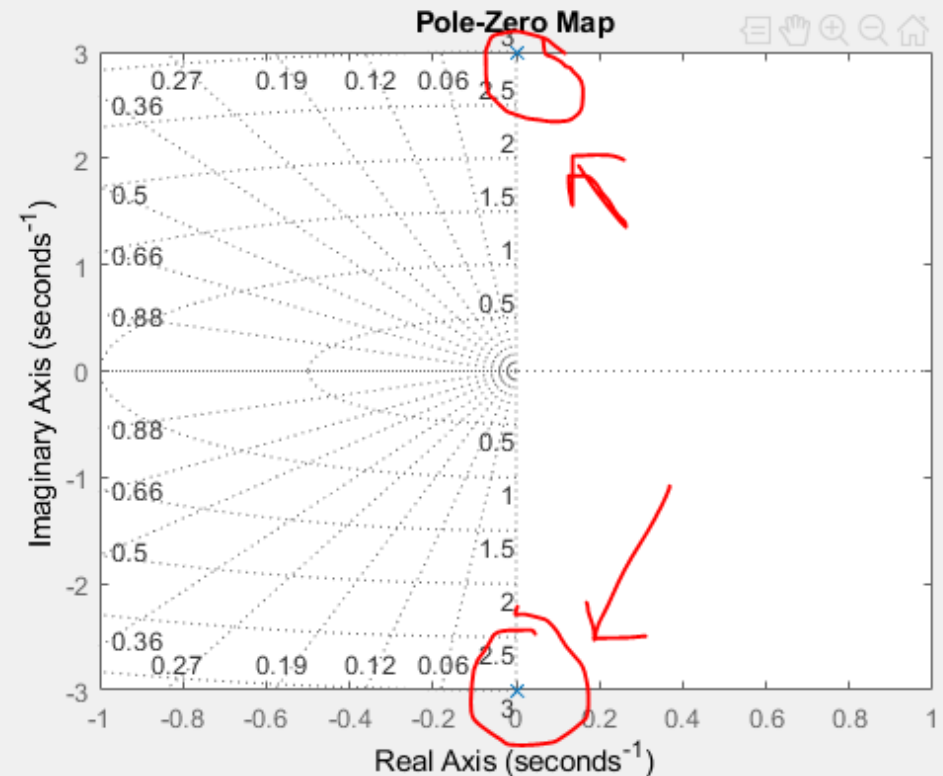
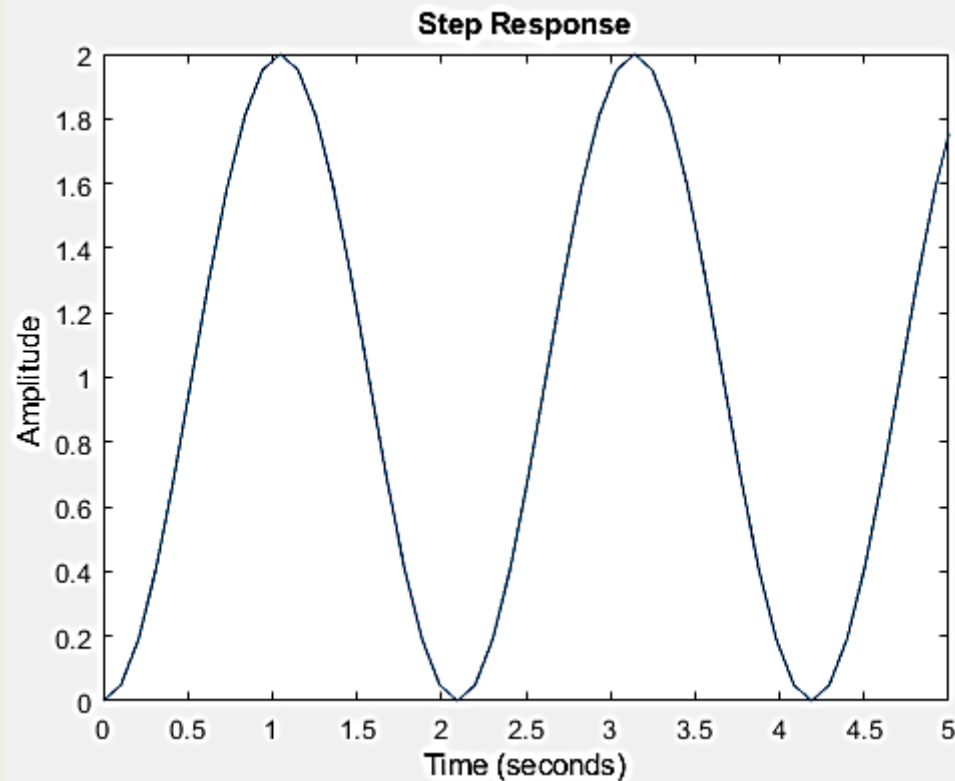
Olarak seçelim  $\zeta = 0$

Orjindeki giriş sabit zorlanmış cevabı oluştururken imajiner eksen üzerinde  $\pm 3j$  deki kutuplar sinüsoidal doğal cevap oluşturur.



# MATLAB YARDIMI

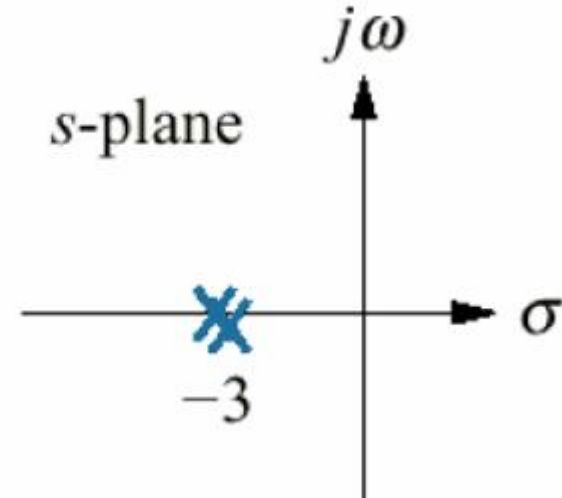
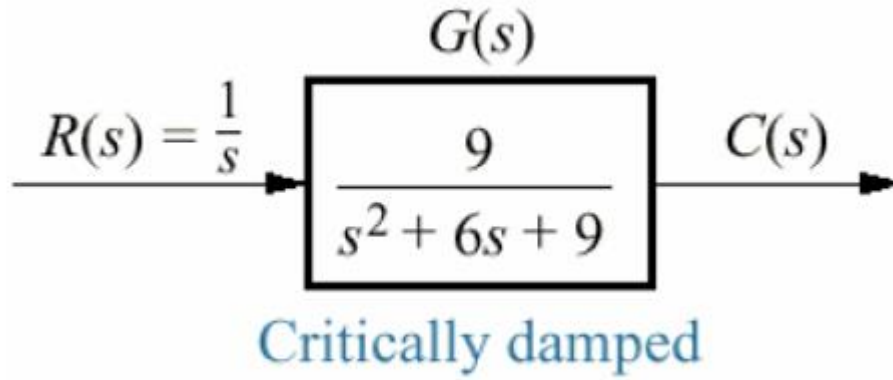
```
clear;close all
y=tf(9,[1 0 9]);
step(y)
xlim([0 5])
figure
pzmap(y), grid
```



## KRİTİK SÖNÜMLÜ

: İki katlı kök reel eksen(negatif bölge) üzerindeyken oluşan cevabdır.

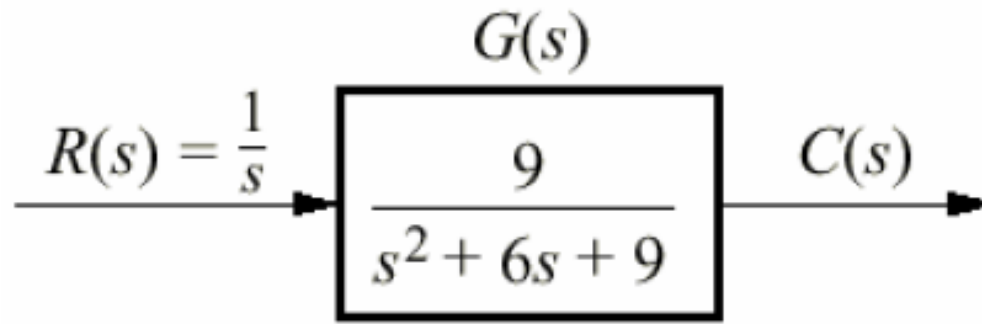
$$\zeta = 1$$



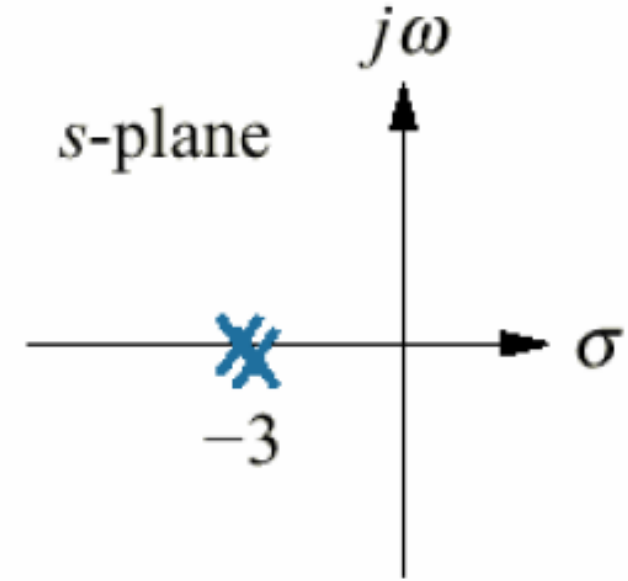


**Kritik Sönümlü Cevap:** İki katlı kök reel eksen(negatif bölge) üzerindeyken oluşan cevabdır.

$$C(s) = \frac{9}{s(s^2 + 6s + 9)} = \frac{9}{s(s + 3)^2} \quad \text{Olarak seçelim}$$



Critically damped



$$c(t) = (1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t})u(t)$$

Orjindeki giriş sabit zorlanmış cevabı oluştururken reel eksen üzerinde **-3** deki kutuplar üstel ve üstel ile zamanın çarpımı doğal cevabı oluştururlar.

# MATLAB YARDIMI

```
syms s
pay=[9]
payda=[1 6 9 0]
[r, p, k]=residue(pay,payda)
```

```
r =
    -1
    -3
     1

p =
    -3
    -3
     0

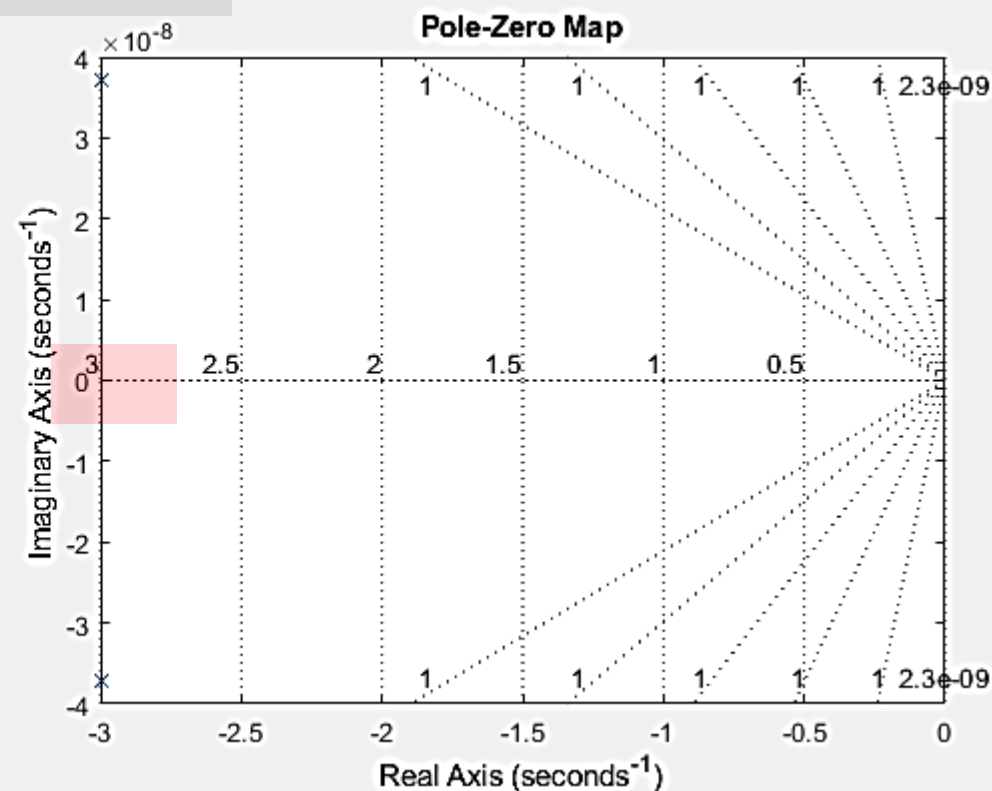
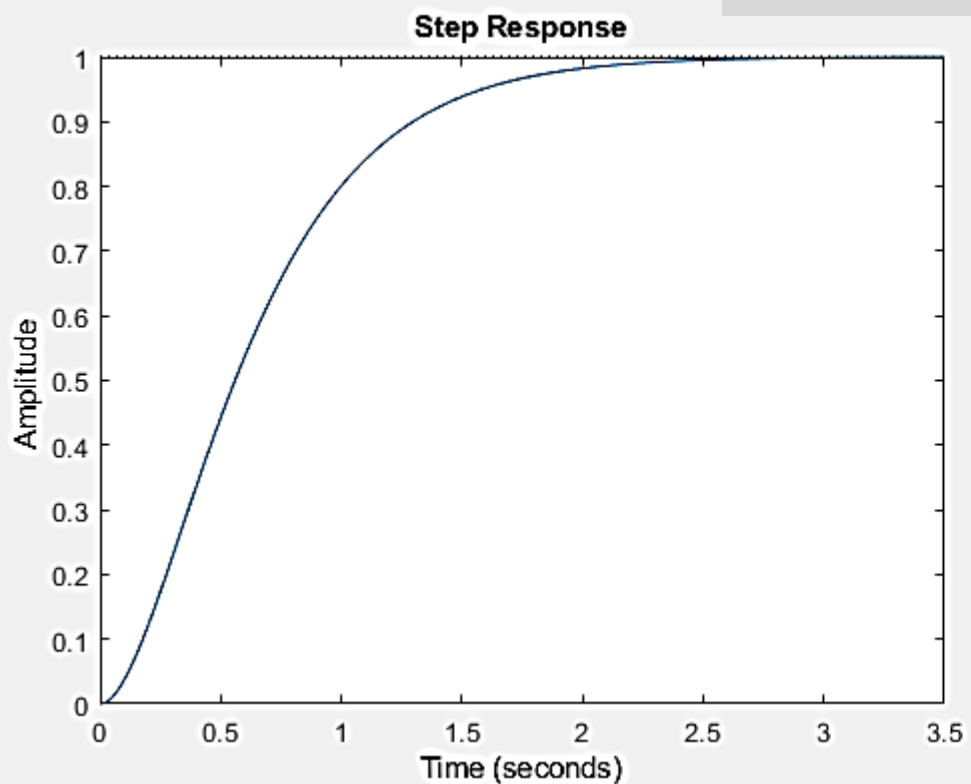
k =
    []
```

$$c(s) = -\frac{1}{s+3} - \frac{3}{(s+3)^2} + \frac{1}{s}$$

$$c(t) = -1e^{-3t} - 3te^{-3t} + 1$$

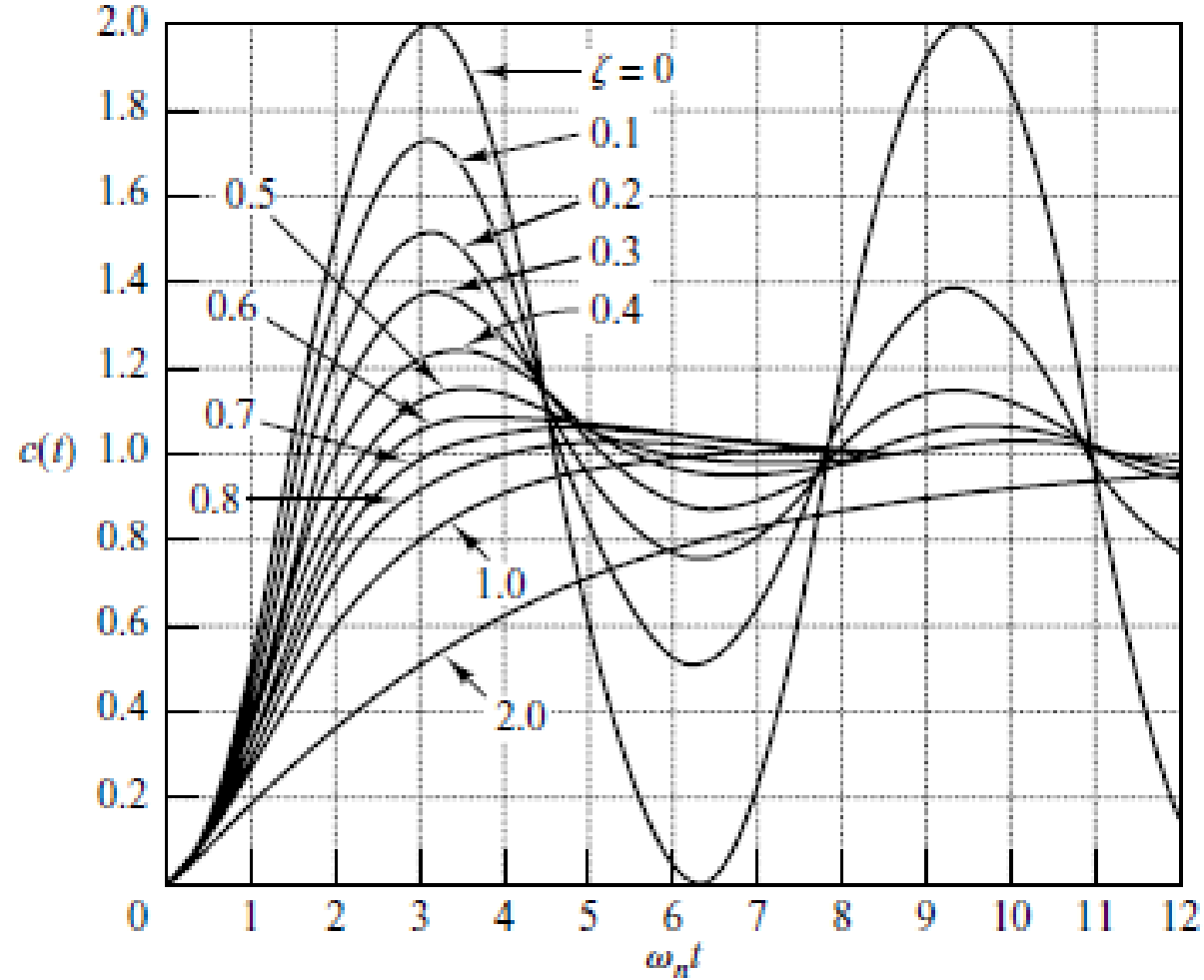
# MATLAB YARDIMI

```
clear;close all
y=tf(9,[1 6 9]);
step(y)
figure
pzmap(y), grid
```



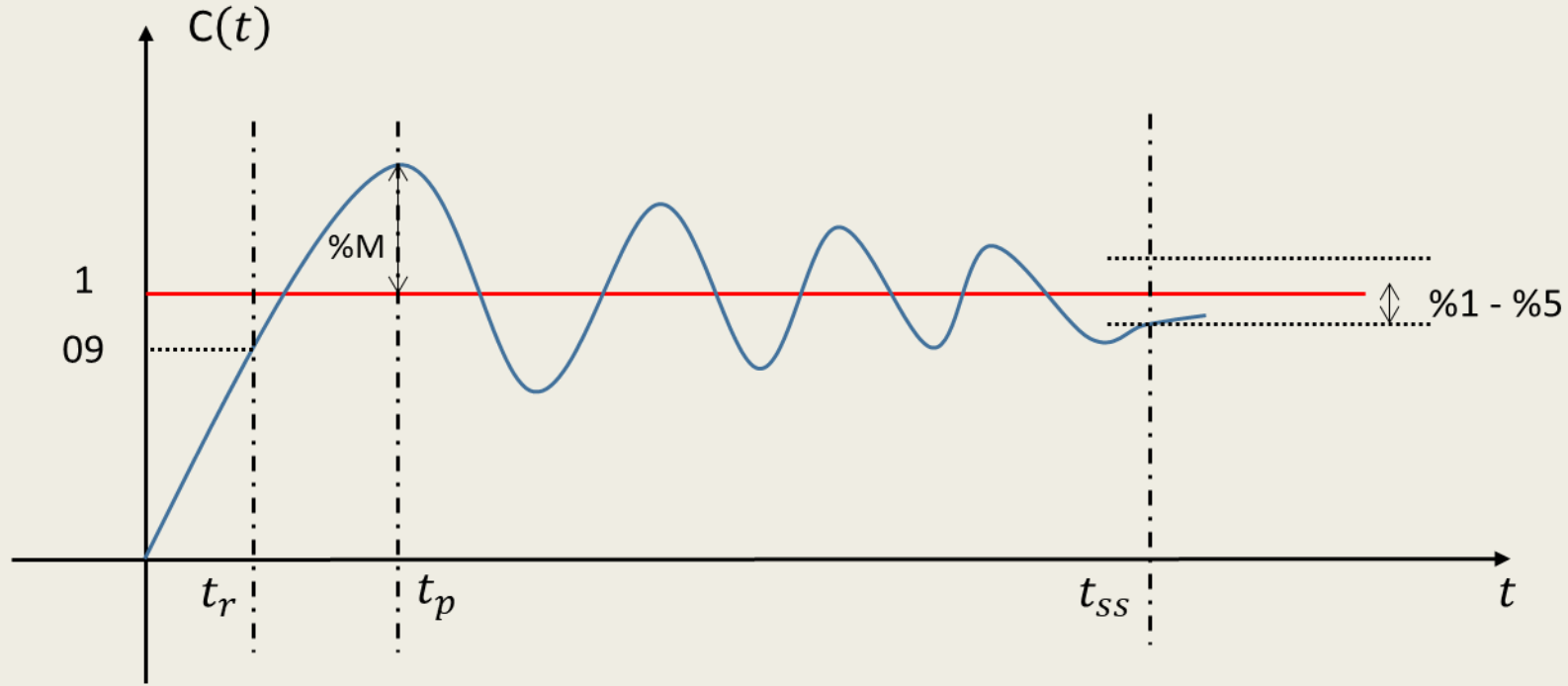
# GİRİŞ

Değişen  
sönüm  
oranları ile  
İkinci derece  
sistem  
cevabı



Sönüm katsayısı  
küçüldükçe çıkış  
daha osilasyonlu  
olur.

## 2. Derece Az Sönümlü Sistemler Performans Metrikleri



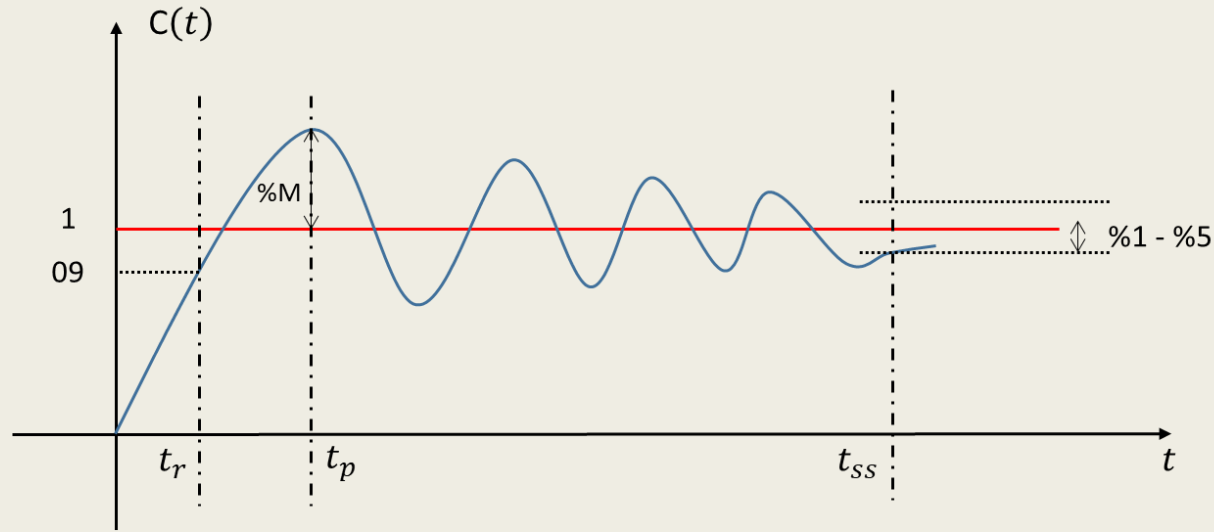
$t_r$ : Yükselme Zamanı

$t_p$ : Zirve Zamanı

%M: Yüzde aşım

$t_{ss}$ : Yerleşme Zamanı

## 2. Derece Az Sönümlü Sistemler Performans Metrikleri



**%M: Yüzde aşım**

Sistem cevabının tepe veya maksimum noktası ile kararlı haldeki değeri arasındaki farkın kararlı haldeki değere oranıdır. % olarak ifade edilir.

**$t_p$ : Zirve Zamanı**

Sistem cevabının tepe veya maksimum noktaya ulaştığında geçen süre.

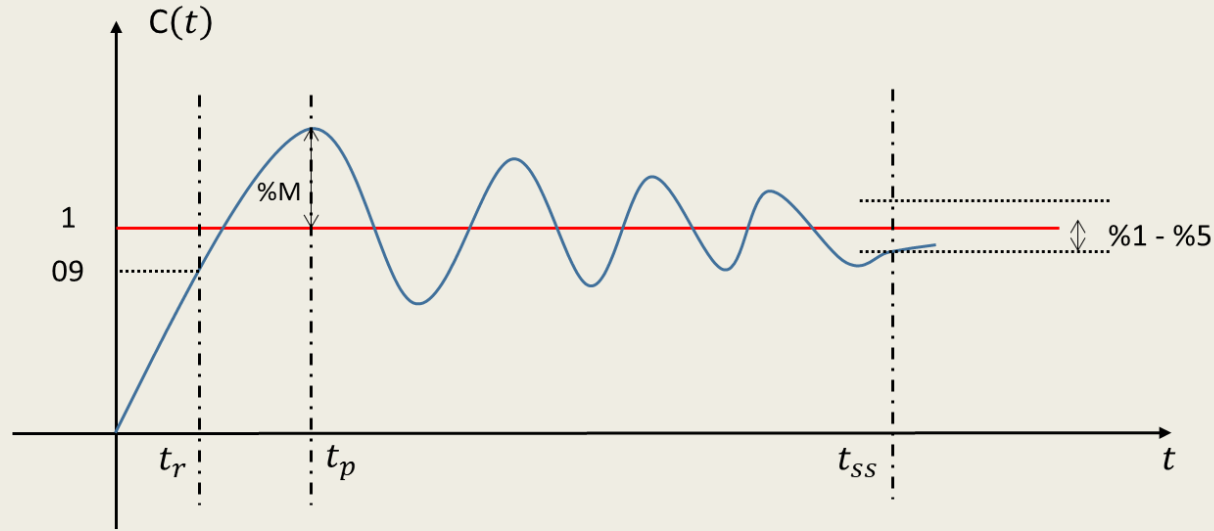
**$t_r$ : Yükselme Zamanı**

Sistem cevabının %90'nına ulaşıncaya kadar geçen süre olarak tanımlanır.

**$t_{ss}$ : Yerleşme Zamanı**

Sistem cevabının %98'ine ulaşıncaya kadar geçen süre olarak tanımlanır.

## 2. Derece Az Sönümlü Sistemler Performans Metrikleri



$t_r$ : Yükselme Zamanı

$t_p$ : Zirve Zamanı

$t_{ss}$ : Yerleşme Zamanı

$$t_r = \frac{\pi - \cos^{-1}\xi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{\pi - \theta}{\omega_d}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{\pi}{\omega_d}$$

$$t_s = 5T = \frac{5}{\xi \cdot \omega_n}$$

$\%M$ : Yüzde aşım

$$M_p = e^{\left(\frac{-\xi \cdot \pi}{\sqrt{1 - \xi^2}}\right)}$$

Aşağıda transfer fonksiyonu verilen sistemin gecikme, yükselme, maksimum aşma ve yerleşme süreleri ile maksimum aşma değerini hesaplayınız.

$$TF = \frac{4}{s^2 + 3s + 4}$$



$$TF = \frac{4}{s^2 + 3s + 4} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2 \cdot \xi \cdot w_n \cdot s + w_n^2}$$

$$w_n^2 = 4 \Rightarrow w_n = 2 \text{ rad/sn}$$

$$2 \cdot \xi \cdot w_n = 3 \Rightarrow \xi = 0,75$$

Yükselme zamanı;

$$\theta = \cos^{-1} 0,75 = 0,723 \text{ rad} \text{ (Hesap makinesi radyan modunda!)}$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = 2 \sqrt{1 - 0,75^2} = 1,323 \text{ rad/sn}$$

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d} = \frac{\pi - 0,723}{1,323} = 1,828 \text{ sn}$$

Maksimum aşmaya ulaşma zamanı;

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{1,323} = 2,375 \text{ sn}$$

Yerleşme zamanı;

$$t_s = 4T = \frac{4}{\xi \cdot \omega_n} = \frac{4}{0,75 \cdot 2} = 2,667 \text{ sn}$$

Maksimum aşma;

$$M_p = e^{\left(\frac{-\xi \cdot \pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)} = e^{\left(\frac{-0,75 \cdot \pi}{\sqrt{1-0,75^2}}\right)} = 0,028$$

Buna göre maksimum aşma % 2,8'dir.

Aşağıda transfer fonksiyonu verilen sistemin birim basamak cevabına ait eğriyi MATLAB ile çiziniz. Bu eğri üzerinde maksimum aşma değerini ve tepe zamanını bulunuz. Maksimum yüzde aşma ve tepe zamanı değerini manuel olarak hesaplayıp iki yöntemin uyduğunu gösteriniz.

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 4}$$

# MATLAB YARDIMI

Önce, transfer fonksiyonunun birim basamak yanıtını ve yanıt grafiğini bulalım:

```
>> g=tf(1,[1,1,4]);  
>> step(g)  
>> g
```

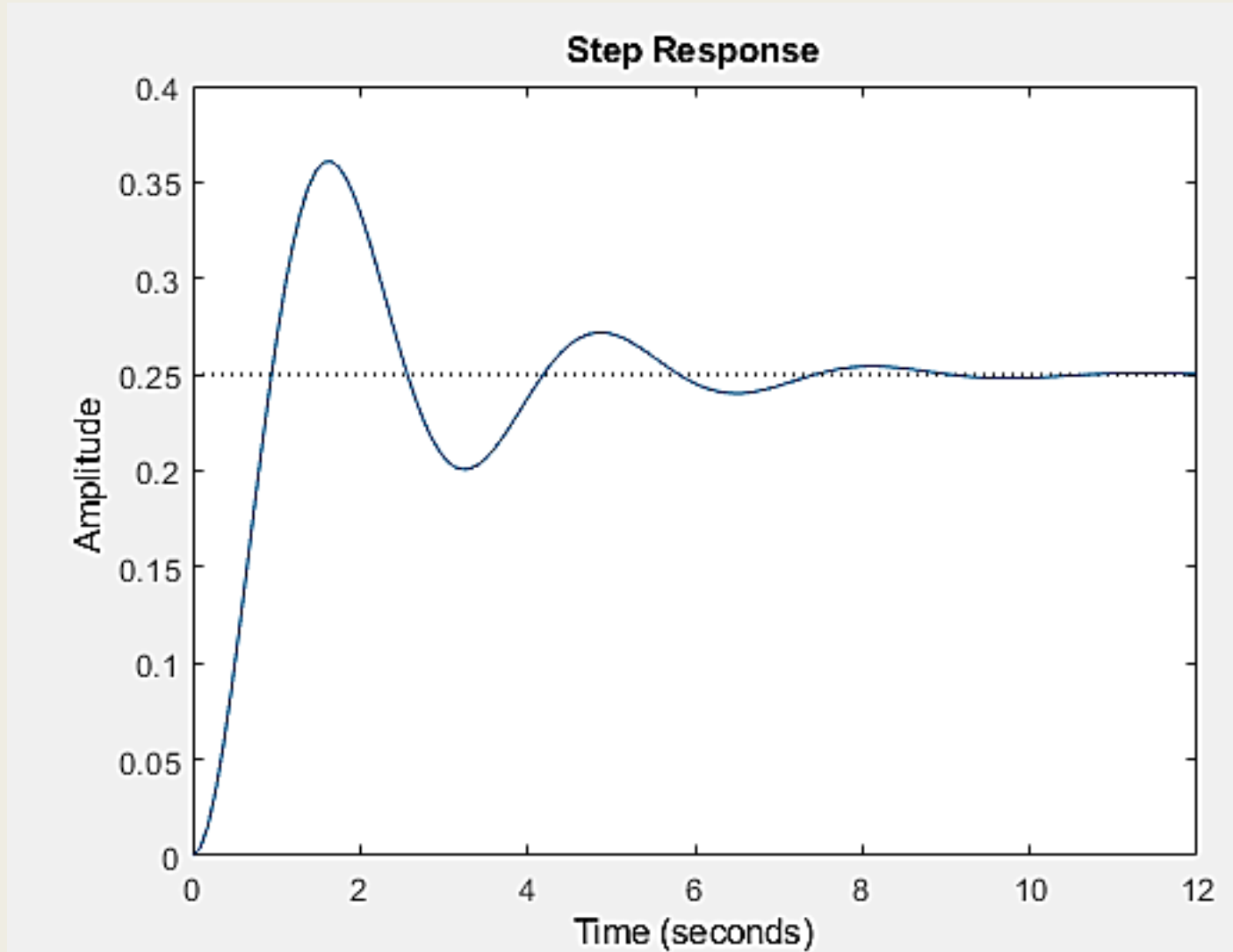
g =

$$\frac{1}{s^2 + s + 4}$$

Continuous-time transfer function.

# YANIT GRAFIĞI

Sönümlü tip kararlı biri sistem.



# MATLAB YARDIMI

Transfer fonksiyonunun kutup, sönüm oranı, doğal frekans ve zaman sabiti değerlerini bulalım:

```
>> damp(g)
```

Pole

```
-5.00e-01 + 1.94e+00i  
-5.00e-01 - 1.94e+00i
```

Damping

```
2.50e-01  
2.50e-01
```

Frequency  
(rad/seconds)

```
2.00e+00  
2.00e+00
```

Time Constant  
(seconds)

```
2.00e+00  
2.00e+00
```

$\zeta$

$\omega_n$

# MATLAB YARDIMI

Doğal frekans ( $w_n$ ) ve sönüm oranlarını ( $\zeta$ ) aşağıdaki şekilde de bulabiliriz.

```
>> [wn zeta]=damp(g)
```

```
wn =
```

```
2.0000
```

```
2.0000
```

```
Zeta =
```

```
0.2500
```

```
0.2500
```

```
>> g=tf(1,[1,1,4]);
```

```
>> step(g)
```

```
>> g
```

```
g =
```

```
1
```

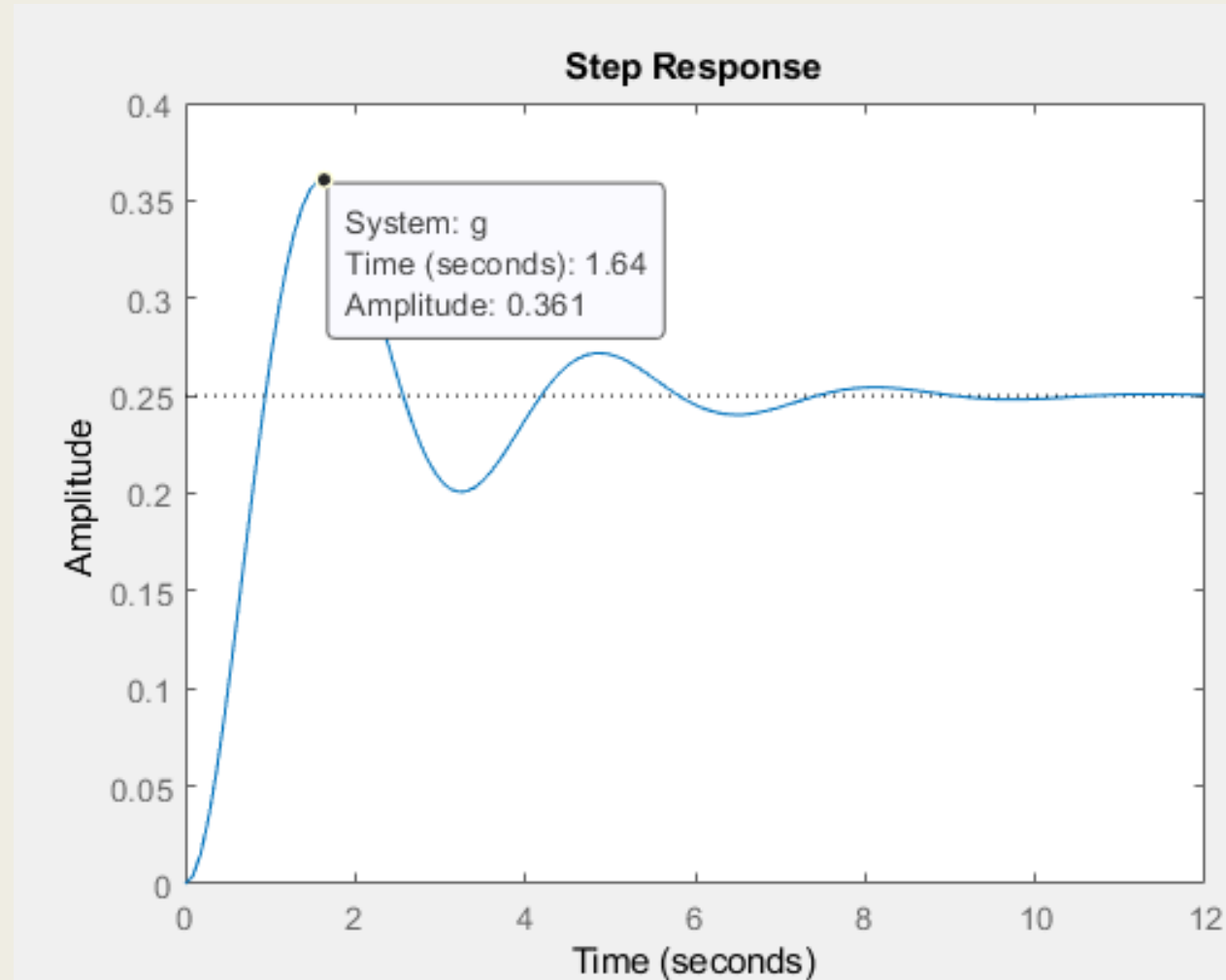
```
-----  
s^2 + s + 4
```

Continuous-time transfer function.



# MATLAB YARDIMI

Tepe zamanı veya zirve zamanı ( $t_p$ ) değerini önce grafikten tespit edip sonra işlem yaparak bulalım. Eşit çıkması gerekli ...  
Ayrıca maksimum yüzde aşmayı da bulacağız.



Tepe zamanı değerini manuel olarak hesaplayalım:

$$\zeta = 0.25$$
$$\omega_n = 2$$

Bunları Matlab yardımı ile bulmuştuk

$$w_d = w_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 2 * \sqrt{1 - 0.25^2} = 1.94 \text{ rad/s}$$

$$\sigma = \zeta w_n = 2 * 0.25 = 0.5$$

$$s_{1,2} = -0.5 \pm j1.94$$

Tepe zamanı:

$$t_p = \frac{\pi}{w_d} = \frac{3.14}{1.94} = 1.619 \text{ sn}$$

Grafik ile uyumlu

Maksimum yüzde aşma:

$$M_p = e^{-\left(\frac{0.25\pi}{\sqrt{1-0.25^2}}\right)} = 0.444 = \%44.4$$

Grafik ile uyumlu

# MATLAB YARDIMI

$$s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -\sigma \pm j\omega_d$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

```
>> wd=wn.*sqrt(1-xsi.^2)
```

```
wd =
```

```
1.9365
```

```
1.9365
```

```
>> tp=pi./wd
```

```
tp =
```

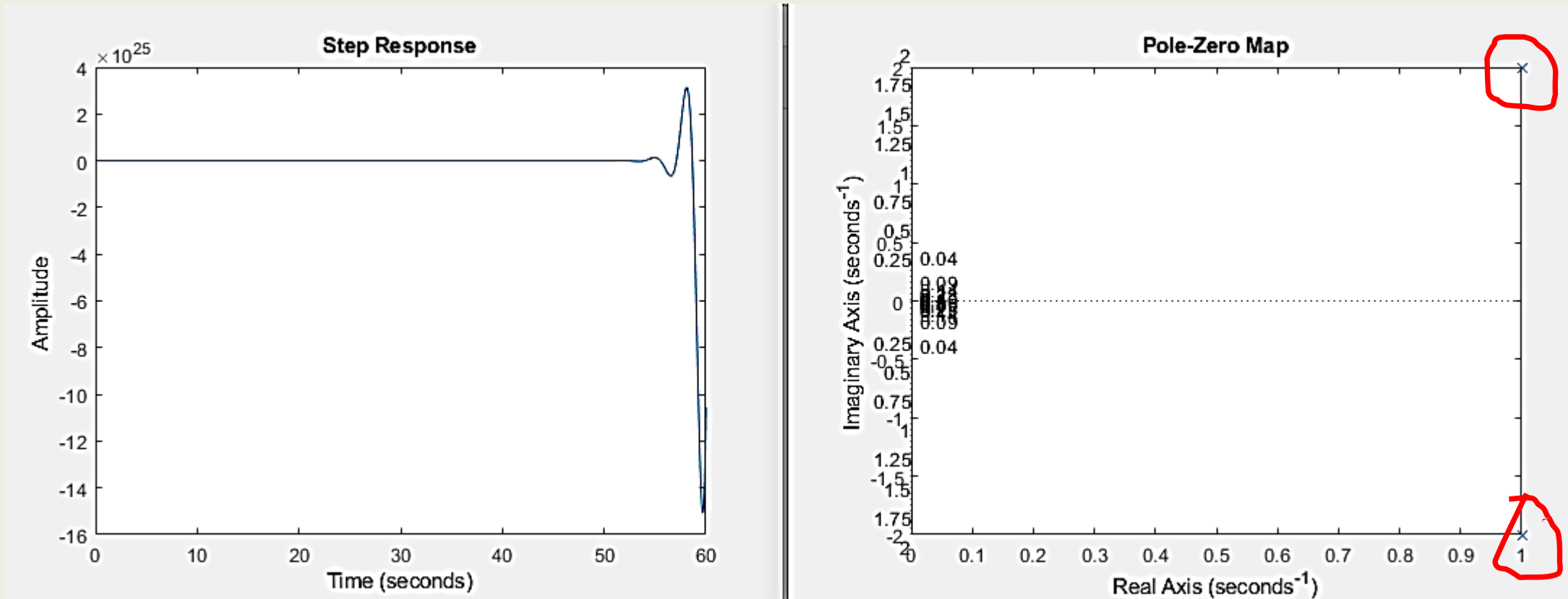
```
1.6223
```

```
1.6223
```

Aşağıda transfer fonksiyonu verilen sistemin birim basamak cevabına ait eğriyi MAT LAB ile çiziniz. Sönüm oranını ve doğal frekansı hesaplatınız.

$$GH(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 5}$$

```
clear;close all
y=tf(9,[1 -2 5]);
step(y)
figure
pzmap(y), grid
```



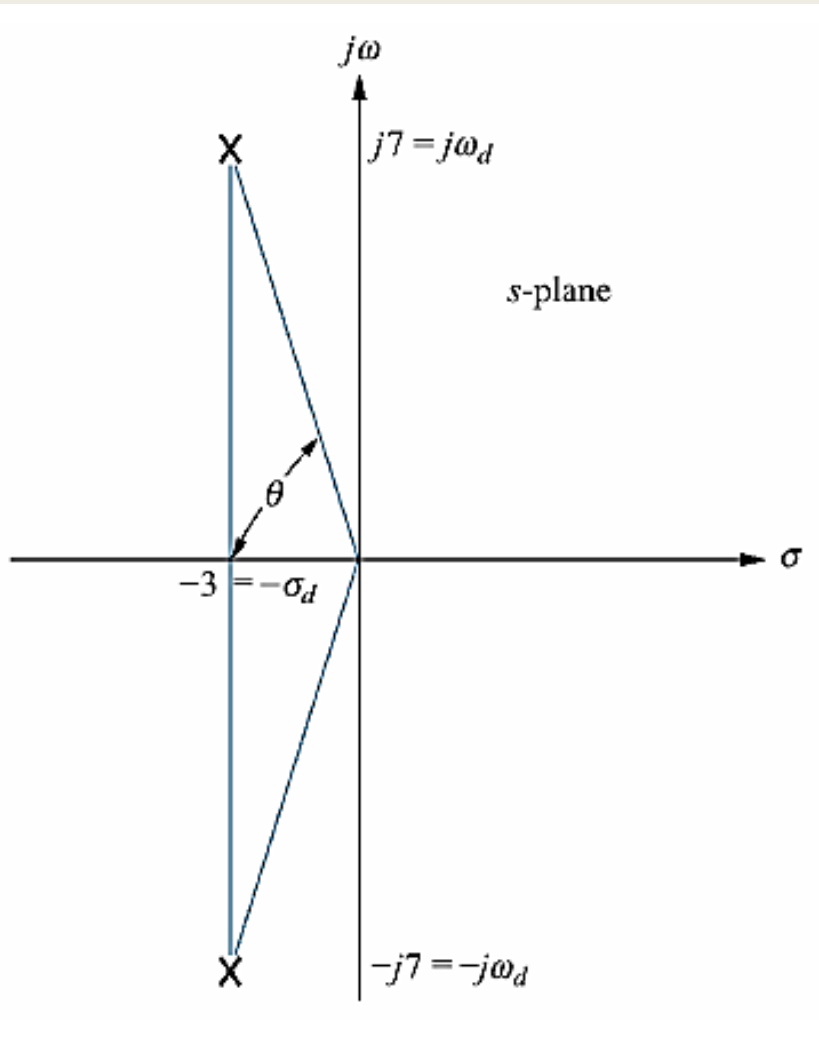
```
>> damp(y)
```

Pole	Damping	Frequency (rad/seconds)	Time Constant (seconds)
$1.00e+00 + 2.00e+00i$	$-4.47e-01$	$2.24e+00$	$-1.00e+00$
$1.00e+00 - 2.00e+00i$	$-4.47e-01$	$2.24e+00$	$-1.00e+00$



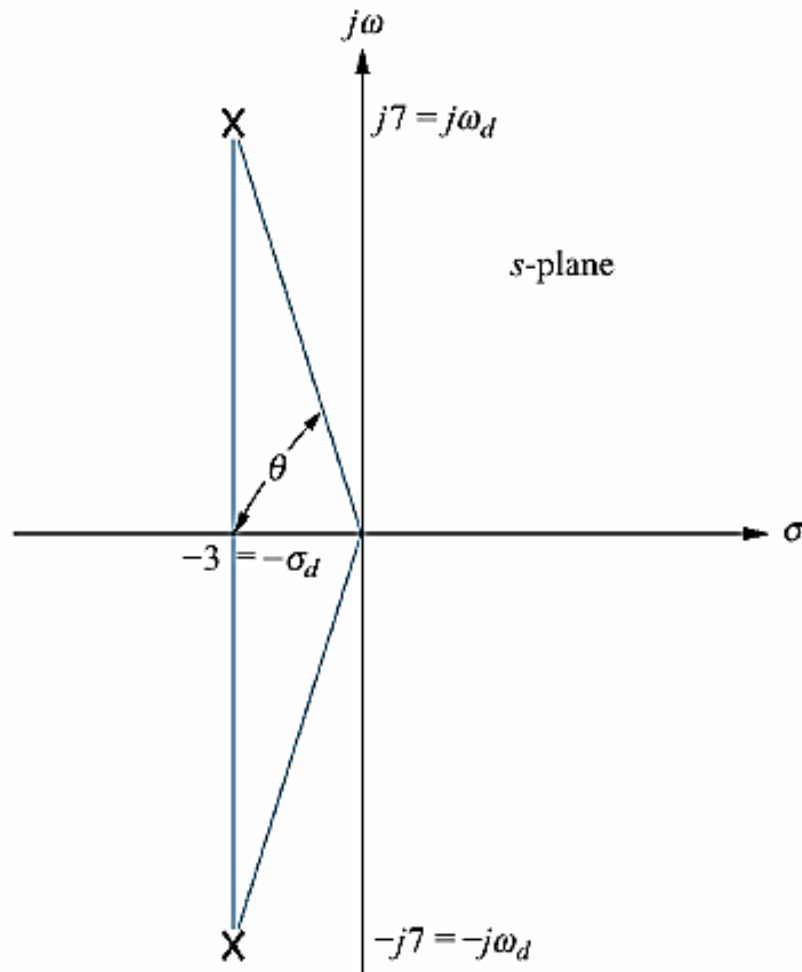
**Örnek:**

Kutup şekli verilen Sistem için,  $\zeta$ ,  $\omega_n$ ,  $T_p$ , %OS ve  $T_s$ 'yi bulunuz



## Örnek:

Kutup şekli verilen Sistem için,  $\zeta$ ,  $\omega_n$ ,  $T_p$ , %OS ve  $T_s$ 'yi bulunuz



Burada

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad \text{ve} \quad \theta = \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right) = \cos^{-1} \zeta$$

$$s_1, s_2 = -\zeta \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = -\sigma \pm j \omega_d$$

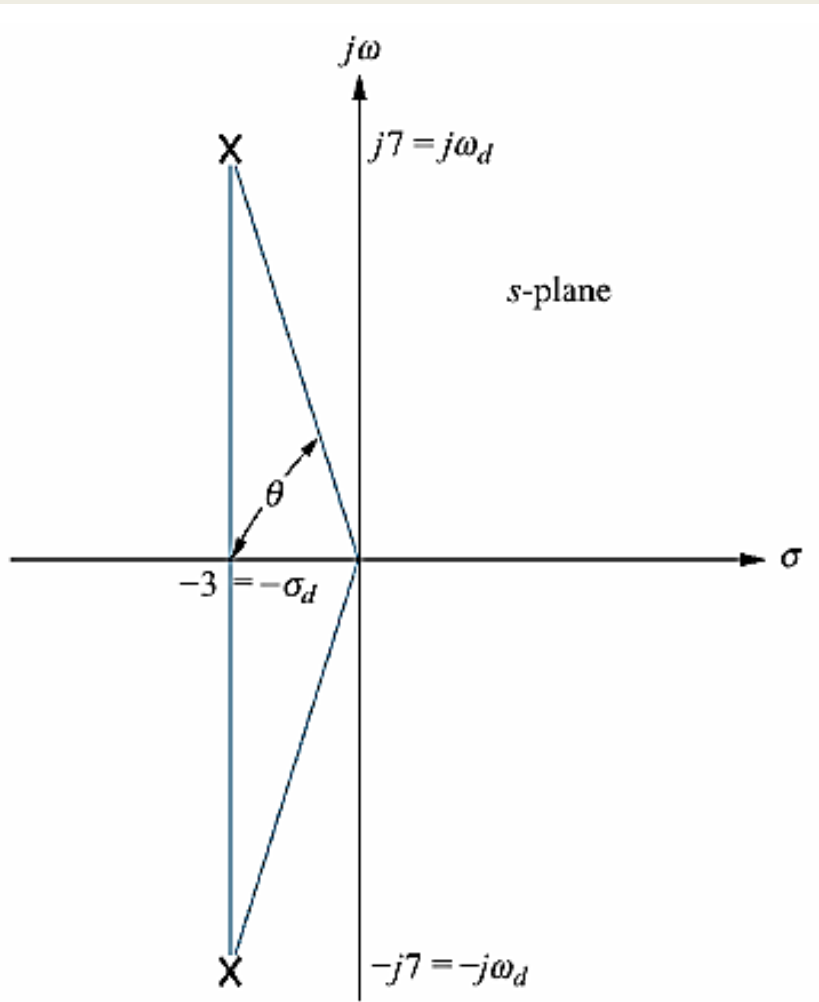
$$\begin{aligned} \zeta &= \cos(\theta) \\ &= \cos(\arctan(7/3)) = 0.394 \end{aligned}$$

$$\omega_n = \sqrt{7^2 + 3^2} = 7.616 \text{ rad/s}$$



## Örnek:

Kutup şekli verilen Sistem için,  $\zeta$ ,  $\omega_n$ ,  $T_p$ , %OS ve  $T_s$ 'yi bulunuz



$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$G(s) = \frac{57.91}{s^2 + 6s + 57.91}$$

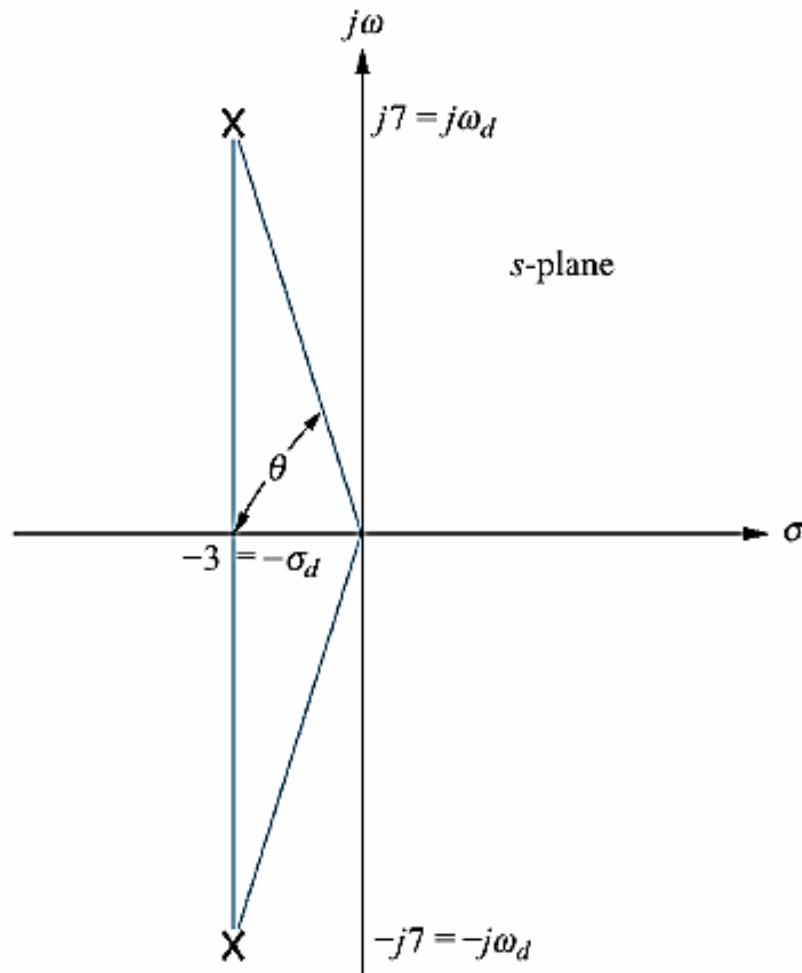
$$\theta = \tan^{-1} \frac{7}{3} = 1.166 \text{ rad}$$

$$\omega_d = 7.616 \sqrt{1 - 0.394^2} = 6.999 \cong 7$$

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d} = \frac{3.14 - 1.166}{7} = 0.28 \text{ sn}$$

## Örnek:

Kutup şekli verilen Sistem için,  $\zeta$ ,  $\omega_n$ ,  $T_p$ , %OS ve  $T_s$ 'yi bulunuz



$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{7} = 0.449s$$

$$\begin{aligned} \%OS &= e^{-\left(\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} \times 100 \\ &= e^{-\left(\frac{0.394\pi}{\sqrt{1-0.394^2}}\right)} \times 100 = \%26.01 \end{aligned}$$

$$T_s = \frac{4}{\sigma_d} = \frac{4}{3} = 1.33s$$

## İkinci Dereceden Sistemlerin Geçici ve Kalıcı Durum Cevabı

Sönüm oranı  $\zeta$ 'ya bağlı olarak karakteristik denklemin kutupları 4 farklı kategoride incelenebilir.

1. Eğer  $\zeta = 0$  ise,  $s_1$  ve  $s_2$  tamamen kompleks eşleniktir ( $s_{1,2} = \mp j\omega_n$ ) ve **geçici zaman cevabı sona ermez**.
2. Eğer  $0 < \zeta < 1$ , Kapalı çevrim kutupları  $s_1$  ve  $s_2$  negatif gerçekteki kısmı olan kompleks eşlenik kutuplardır ( $s_{1,2} = -\sigma \mp j\omega_d$ ). Bu tarz sistemlere **az sönümlü (*under damped*)** sistemler adı verilir.
3. Eğer  $\zeta = 1$ , bu durumda **sistem kritik sönümlüdür**. Kapalı çevrim sistemin negatif ve gerçekteki katlı kutupları ( $s_{1,2} = -\omega_n$ ).
4.  $\zeta > 1$  durumunda **fazla sönümlü sistem** cevabı elde edilir. Sistemin kutupları negatif, farklı iki gerçekteki sayıdır ( $s_{1,2} = -\sigma \mp \omega_d$ ).

## İkinci Dereceden Sistemlerin Impulse Girişine Cevabı

### HATIRLATMA

$$\text{Karakteristik denklem} = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

Buradan sistemin kutupları aşağıdaki gibi bulunur:

$$s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -\sigma \pm j\omega_d$$

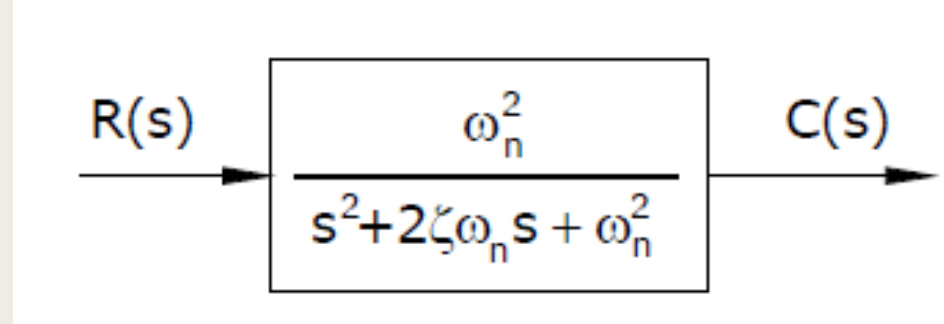
*$\xi = 0$  ise iki kök de sanal ekseninde*

*$\xi = 1$  ise gerçek ekseninde iki eşit kök yani katlı kök*

*$\xi > 1$  ise iki kök de gerçek ekseninde ancak eşit değil*

*$0 < \xi < 1$  ise iki kök de sanal ve eşlenik*

## İkinci Dereceden Sistemlerin Impulse Girişine Cevabı



$R(s) = 1$  (Birim Impulse Laplace dönüşümü)

$$C(s) = R(s) * G(s) = [1] * \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

## İkinci Dereceden Sistemlerin Impulse Girişine Cevabı

$$C(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$$

$\xi = 0$  ise

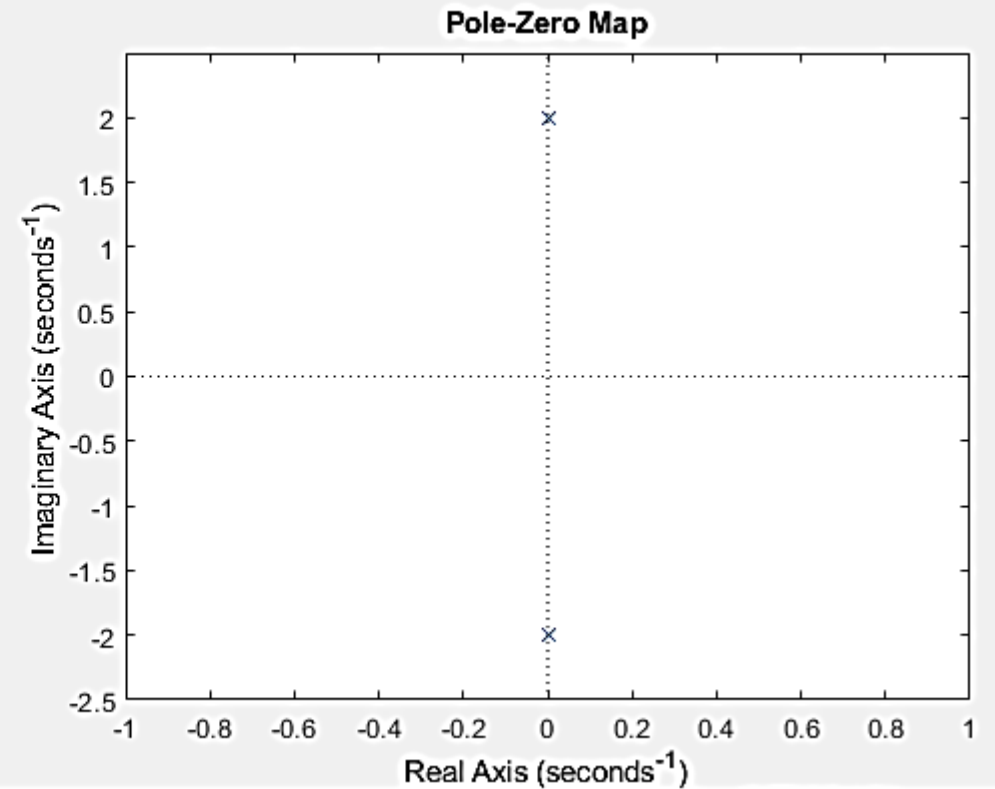
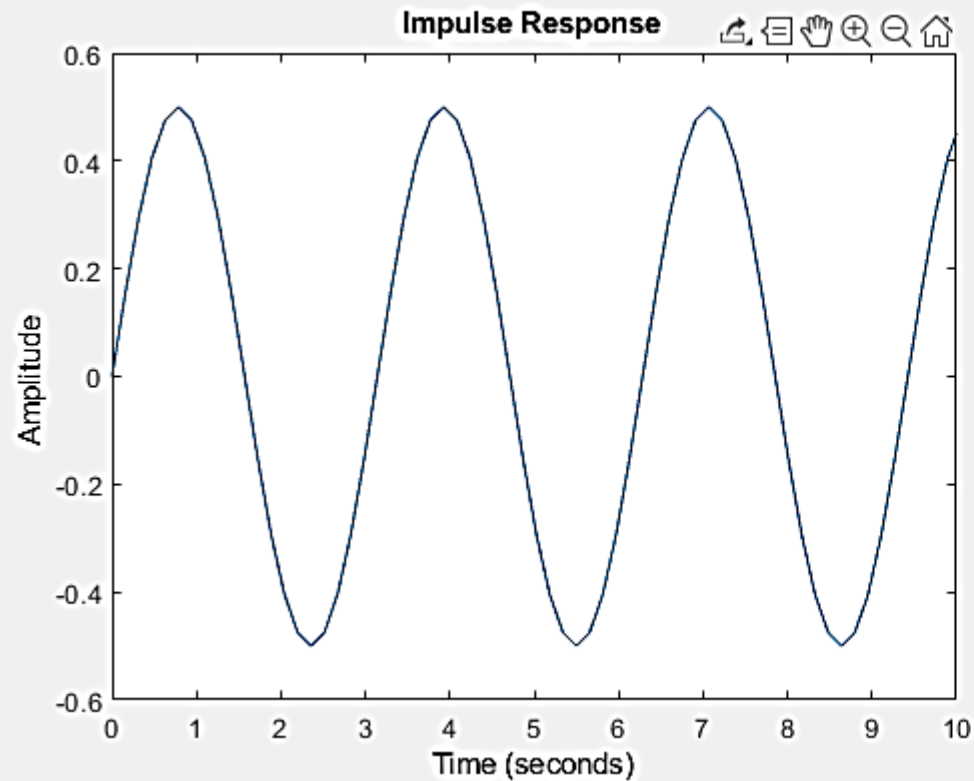
$$C(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + w_n^2}$$

$$c(t) = w_n \sin w_n t$$

## İkinci Dereceden Sistemlerin Impulse Girişine Cevabı

$$C(s) = \frac{4}{s^2 + 4}$$

Sönümsüz



## İkinci Dereceden Sistemlerin Impulse Girişine Cevabı

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$\xi = 1$  ise

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$c(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t}$$

$\zeta = 1$  Durumu (Kritik Sönüm)

Bu durumda, sistemin karakteristik denklemini çift katlı köklere sahiptir:

$$s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2 = (s + \omega_n)^2$$

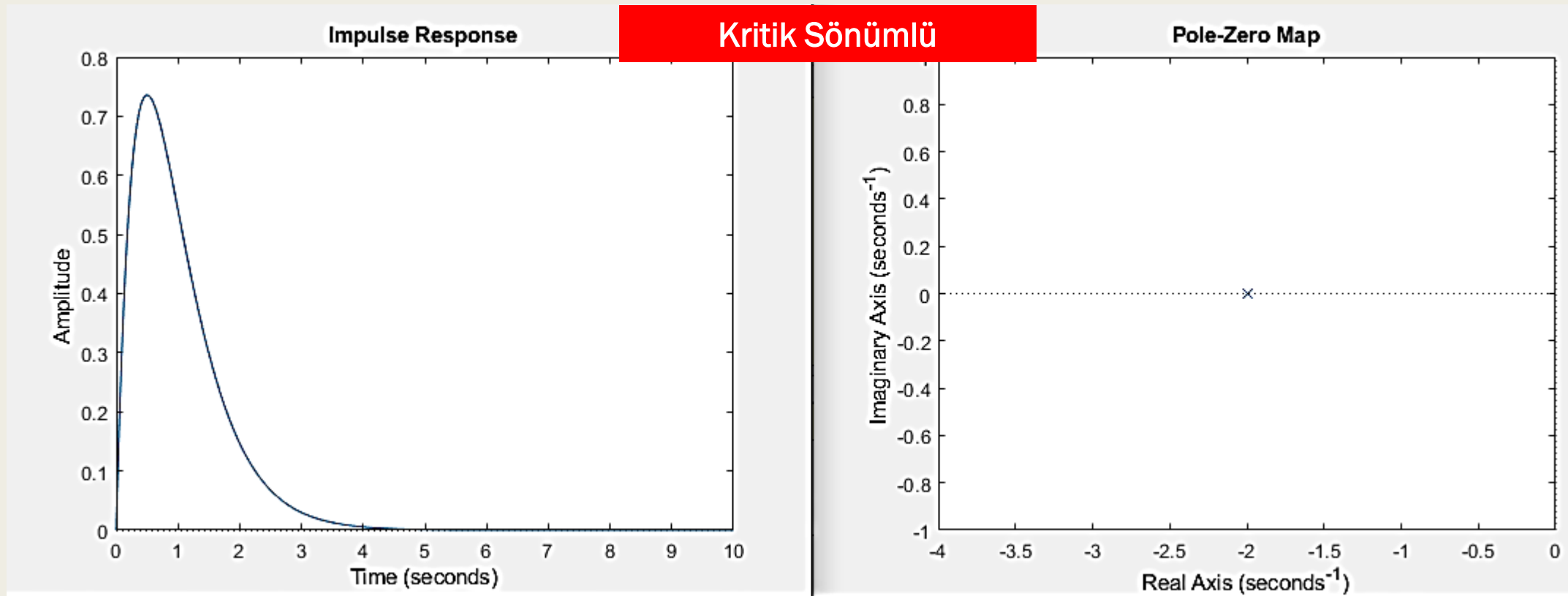
Bu nedenle sistemin impulse yanıtı şu şekilde türetilir:

$$h(t) = (\omega_n^2) t e^{-\omega_n t}, \quad t \geq 0$$



## İkinci Dereceden Sistemlerin Impulse Girişine Cevabı

$$C(s) = \frac{4}{s^2 + 4s + 4} \quad \xi = 1 \text{ ise}$$



## İkinci Dereceden Sistemlerin Impulse Girişine Cevabı

$$C(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$$

$\xi > 1$  ise

$$C(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$$

$$c(t) = \left( \frac{w_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \right) [e^{-(\zeta w_n + w_n \sqrt{\zeta^2 - 1})t} + e^{-(\zeta w_n - w_n \sqrt{\zeta^2 - 1})t}]$$

### $\zeta > 1$ Durumu (Aşırı Sönümlü)

Bu durumda, karakteristik denklem reel ve farklı köklere sahiptir:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = (s - s_1)(s - s_2)$$

Burada,

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

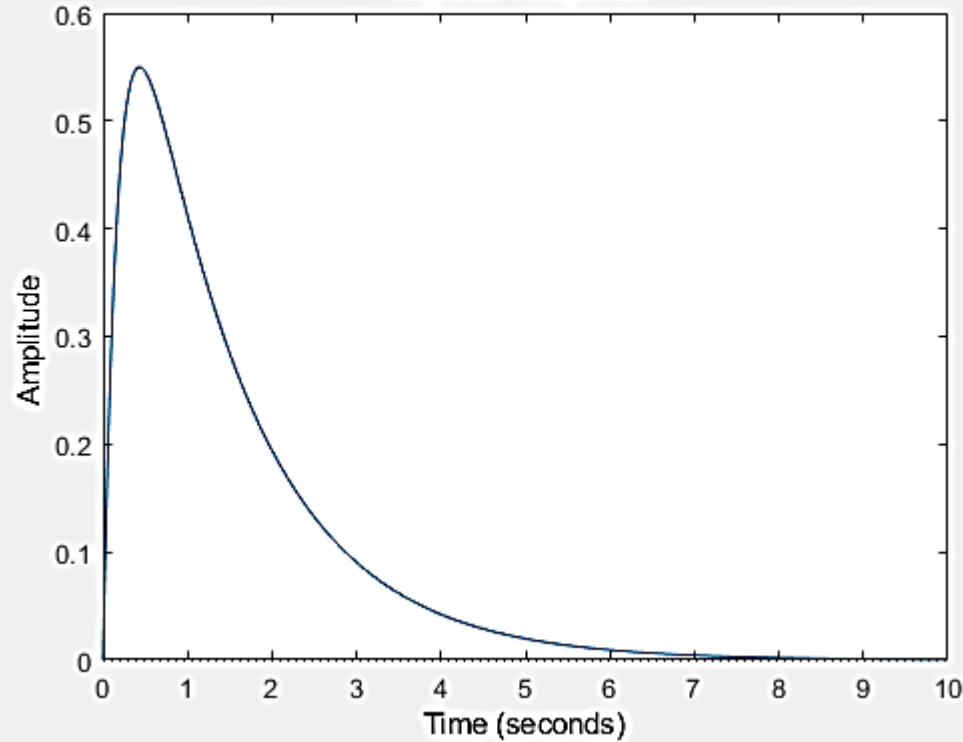
olup, impulse yanıtı şu şekilde elde edilir:

$$h(t) = \frac{\omega_n^2}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}), \quad t \geq 0$$

## İkinci Dereceden Sistemlerin Impulse Girişine Cevabı

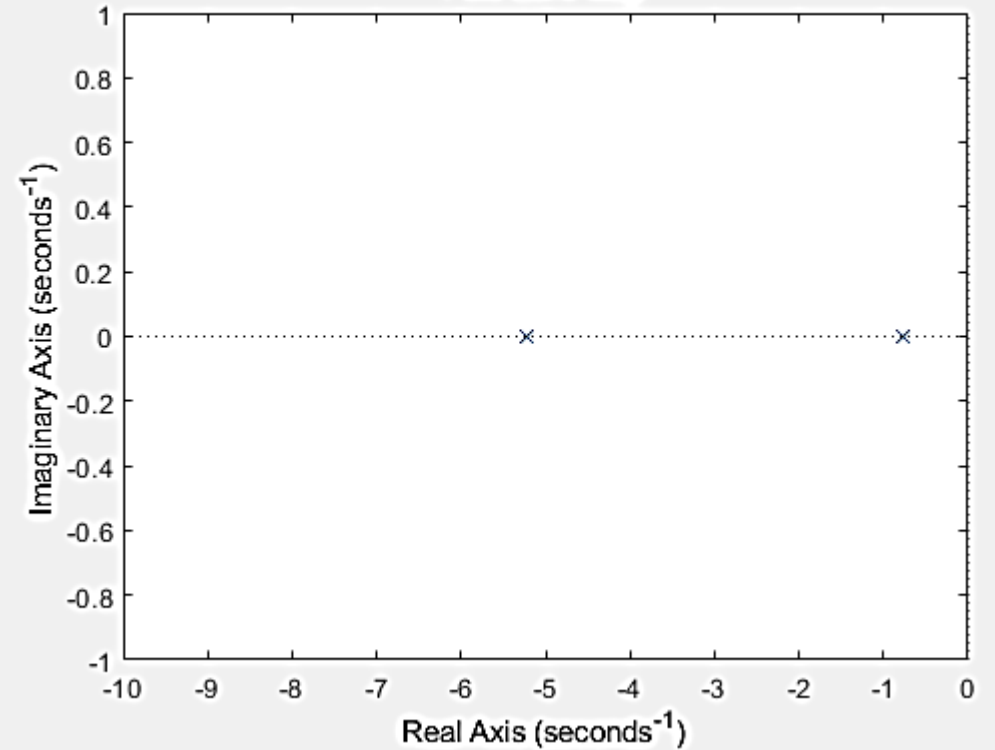
$$C(s) = \frac{4}{s^2 + 6s + 4} \quad \xi = 1.5 \text{ seçelim}$$

Impulse Response



Aşırı Sönümlü

Pole-Zero Map



## İkinci Dereceden Sistemlerin Impulse Girişine Cevabı

$$C(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$$

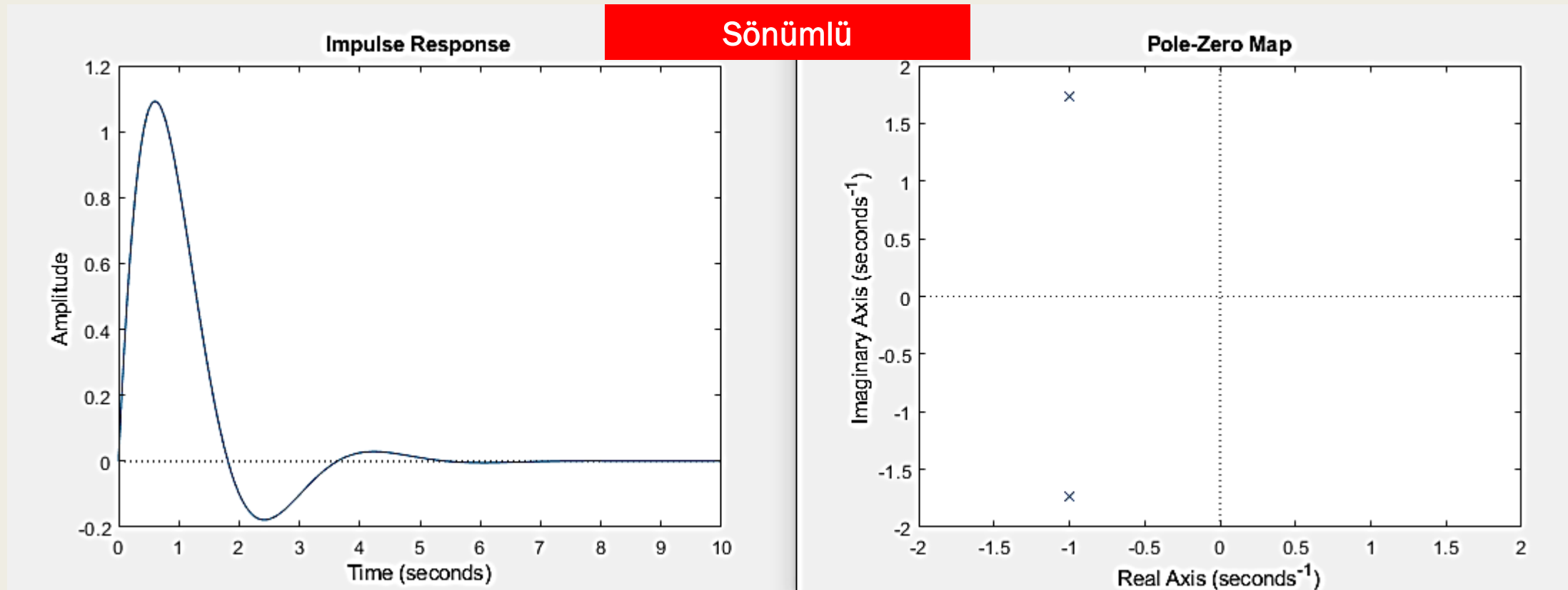
**$0 < \xi < 1$  ise**

$$C(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$$

$$c(t) = \left( \frac{w_n e^{-\zeta t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \right) \sin w_d t$$

# İkinci Dereceden Sistemlerin Impulse Girişine Cevabı

$$C(s) = \frac{4}{s^2 + 2s + 4} \quad \xi = 0.5 \text{ seçelim}$$



# İkinci Dereceden Sistemlerin Impulse Girişine Cevabı

Kritik sönümlü ve Aşırı sönümlü karşılaştırması

$$C1(s) = \frac{4}{s^2 + 6s + 4} \quad \xi = 1.5 \quad \text{Aşırı Sönümlü}$$

$$C2(s) = \frac{4}{s^2 + 4s + 4} \quad \xi = 1 \text{ ise} \quad \text{Kritik Sönümlü}$$

```
close all;clear;clc;
Kritik_Sonumlu=tf(4,[1,4,4]);
impulse(Kritik_Sonumlu)
xlim([0 5.5])
hold on
Asiri_Sonumlu=tf(4,[1,6,4]);
impulse(Asiri_Sonumlu)
xlim([0 5.5])
Sonumlu=tf(4,[1,2,4]);
impulse(Sonumlu)
xlim([0 5.5])
Sonumsuz=tf(4,[1,0,4]);
impulse(Sonumsuz)
xlim([0 5.5])
legend
```

